

Pro gradu -tutkielma
Teoreettinen fysiikka

SHOKKIKIIHDYTYS AURINGON KORONASSA

Arto Sandroos

31.5.2005

Ohjaaja: Yliopistonlehtori Rami Vainio

Tarkastaja: Professori Hannu Koskinen

HELSINGIN YLIOPISTO
FYSIKAALISTEN TIETEIDEN LAITOS

PL 64 (Gustaf Hällströmin katu 2)
00014 Helsingin yliopisto

Tiedekunta/Osasto — Fakultet/Sektion — Faculty		Laitos — Institution — Department	
Matemaattis-luonnontieteellinen		Fysikaalisten tieteiden laitos	
Tekijä — Författare — Author			
Arto Sandroos			
Työn nimi — Arbetets titel — Title			
Shokkikiihdytys Auringon koronassa			
Oppiaine — Läroämne — Subject			
Teoreettinen fysiikka			
Työn laji — Arbetets art — Level		Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages	
pro gradu -työ		67	
Aika — Datum — Month and year		toukokuu 2005	
Tiivistelmä — Referat — Abstract			
<p>Planeettainvälisessä avaruudessa havaitaan runsaasti Auringosta peräisin olevia korkeaenergiaisia hiukkasia. Havainnot voidaan jakaa karkeasti lyhyt- ja pitkäkestoisiin. Yleisin selitys jälkimmäisille on diffusiivinen shokkikiihdytys koronan massapurkauksen edellään työntämissä shokkiaalloissa. Hiukkaset siroavat shokin turbulentista sähkömagneettisesta kentästä ja saavat lisää energiaa ylittäessään shokkirintaman monta kertaa. Kiihdytys alkaa koronassa ja jatkuu useiden päivien ajan massapurkauksen liikkuesssa poispäin Auringosta. Havaintojen mukaan koronassa tapahtuva kiihdytys, jossa protonit voivat saavuttaa jopa 1 GeV suuruusluokkaa olevan energian, tapahtuu minuuttien aikaskaaloissa. Korkeaenergiaisten hiukkasten energiaspektri on tyypillisesti potenssilaki $dN/dE \sim E^{-\sigma}$, missä σ on lähellä ykköstä oleva vakio.</p> <p>Opinnäytteessä esitellään diffusiivisen shokkikiihdytyksen teoria ja tutkitaan kiihdytystä testihiukkassimulaatiolla. Koronan aktiivista aluetta mallinnetaan yksinkertaistetulla magneettikentällä. Simulaatiossa lasketaan tasomaisen shokin eteen injektoitujen protonien ratoja siihen asti, kun ne joko osuvat Auringon pintaan tai karkaavat planeettainväliseen avaruuteen. Lopputuloksista lasketuista statistiikoista etsitään kiihdytykseen vaikuttavia tekijöitä.</p> <p>Saatujen tuloksien perusteella koronan magneettikentän geometrialla on suuri merkitys saavutettavaan energiaan. Tehokkainta kiihdytys on geometrioissa, joissa shokki on lähes poikittainen. Erityisesti sironnan ei tarvitse olla voimakasta suurten energioiden saavuttamiseksi. Sen vaikutus näyttäisi olevan enneminkin jakaumafunktion isotropisointi, jolloin energiaspektristä tulee potenssilakimuotoinen.</p>			
Avainsanat — Nyckelord — Keywords			
Aurinko, korona, diffusiivinen shokkikiihdytys, testihiukkassimulaatio.			
Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited			
Kumpulan tiedekirjasto			
Muita tietoja — övriga uppgifter — Additional information			

Kiitokset professori Hannu Koskiselle
plasmafysiikan opetuksesta vuosien varrella
sekä lukuisista mahdollisuuksista
työskennellä aiheen parissa. Kiitokset myös
tyttöystävälleni Marjaanalle gradun
kieliasuun liittyvistä kommentteista.

Sisältö

1 Johdanto	3
2 Varatun hiukkasen liike	9
2.1 Johtokeskusapproksimaatio	9
2.2 Heikosti epähomogeenisen magneettikentän vaikutus	10
2.3 Johtokeskuksen kulkeutumismopeudet	12
2.4 Magneettisen momentin invarianssi	14
2.5 Magneettinen peilivoima	14
2.6 Energiamuutoksista	16
3 Plasman shokkiaallot	18
3.1 Hyppyeidot ja de Hoffmannin-Tellerin koordinaatisto	19
3.1.1 Vinon shokin hyppyeidot	20
3.1.2 Poikittaisen shokin hyppyeidot	22
3.2 Analyttinen ratkaisu magneettikentälle shokin takana	23
4 Shokkikiihdytys	25
4.1 Subluminaaliset shokit	27
4.2 Superluminaaliset shokit	29
5 Diffusiivinen shokkikiihdytys	30
5.1 Yleistys vinoihin shokkeihin	34
6 Testihiukkassimulaatio	36
6.1 Radan integrointi	37
6.2 Alkuarvojen laskeminen integroijille	39
6.2.1 Johtokeskusintegroijan alkuarvojen laskeminen	40

6.2.2	Gyrohiukkasintegroijan alkuarvojen laskeminen	41
6.3	Koordinaatistomuunnokset	42
6.3.1	Muunnos ylävirrasta shokkiin	44
6.3.2	Muunnos shokista ylävirtaan	45
6.4	Sironta	45
6.4.1	Käytettävän integroijan vaihtaminen	47
6.5	Hiukkasten jakaja	48
6.6	Testauksesta	48
7	Simulaation tulokset	50
7.1	Bipole_down -ajot	51
7.2	Bipole -ajot	54
7.3	Bipole_arc -ajot	55
8	Johtopäätökset	58
A	Shokkiaalto	60
A.1	Kenttien laskeminen shokkilaatikon sisällä	61
A.2	Magneettikentän interpolointi hilapisteiden välissä	62
B	Kuvia magneettikentästä shokin takana	64

1 Johdanto

Aurinko kiertolaisineen syntyi tähtienvälisestä kaasupilvestä noin viisi miljardia vuotta sitten. Ajatteleva ihminen on koko noin 100 000-vuotisen olemassaolonsa ajan katsellut taivaalle ja Aurinkoon, joka näyttää täydellisen pyöreältä. Käsitykset täydellisyydestä alkoivat karista vasta 1600-luvulla, kun Galileo Galilei aikalaisineen käänsi vastikää keksityn teleskoopin kohti Aurinkoa. Teleskoopin avulla löydettiin auringonpilkut ja saatiin tarvittavat todisteet kopernikaanisen maailmankuvan oikeellisuudelle. Katolinen kirkko paljasti harhaoppisen Galilein loppuelämänsä kestäväällä kotiarestilla – sittemmin uusiin ideoihin on suhtauduttu hieman suopeammin.

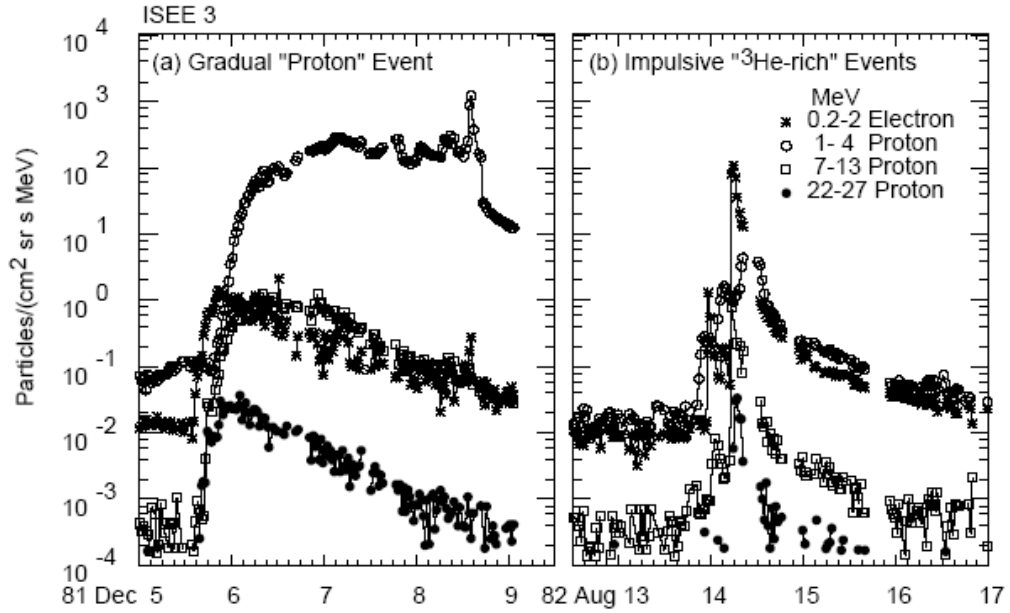
Mittalaitteiden kehitys ja avaruuteen vieminen viime vuosisadan aikana on paljastanut Auringon uskomattoman monimutkaisuuden. Silmin nähtävä Aurinko nousee luotettavasti idästä joka päivä, mutta tarkemmat havainnot kertovat useista väkivaltaisista prosesseista, joiden esiintymistodennäköisyys vaihtelee noin 11 vuoden jaksoissa. Jatkuvan hiukkasvirran, aurinkotuulen, lisäksi Aurinko tuottaa planeettainväliseen avaruuteen hiukkasia erittäin korkeilla energioilla. Nämä hiukkaset sinkoutuvat avaruuteen roihupurkausten ja koronan massapurkausten yhteydessä, joista jälkimmäiset ovat voimakkaimpia Auringon tunnetuista aktiivisista ilmiöistä.

Avaruus ei vastoin yleistä luuloa ole tyhjä, vaan täynnä hiukkasten muodostamaa ionisoitunutta puuroa, plasmaa. Avaruusplasmat ovat tunnetusti erittäin hyviä ideaalikaasuja. Törmäyksellisissä kaasuissa, jotka noudattavat Maxwellin jakaumaa, on aina pieni määrä törmäysten tuottamia korkeaenergisistä hiukkasista verrattuna keskimääräiseen energiaan. Hiukkasten välisten törmäysten puuttuminen plasmassa aiheuttaa sen, että saatuaan jostakin suuren energian varatun hiukkasen on vaikea menettää sitä. Toisaalta merkittävästi muuta plasmaa korkeamman energian saavuttaminen voi olla yhtä vaikeaa.

Tarvittaville kiihdytysprosesseille on etsitty tyydyttäviä selityksiä sitten 1940-luvun, jolloin maanpinnalla havaittiin ensimmäiset Auringosta peräisin olevat korkeaenergisistä protonit. Protonin energian täytyy olla ~ 1 GeV suuruusluokkaa, jotta se kykenee tunkeutumaan magnetosfäärin läpi yläilmakehään asti. Näiden protonien tuottamia hiukkasista havaittiin voimakkaitten kovan röntgenin roihupurkausten jälkeen, joten luonnollinen otaksunta oli että juuri roihut olivat vastuussa kiihdytyksestä. Tätä ”roihukeskistä” kuvaa alettiin uudistaa vasta 70-luvulla, jolloin koronagrafeilla havaittiin ensimmäiset koronan massapurkaukset. Plasmassa eteneviin shokkiaaltoihin viittaavat tyypin II radiopurskeet oli havaittu jo 50-luvulla, mutta itse shokkeja ajavat mekanismit eivät olleet vielä tiedossa [12].

Nykyisen käsityksen mukaisesti hiukkasista kiihdyttää Auringossa kaksi eri

mekanismeja: magneettikentän rekonnektoituminen roihupurkauksissa ja diffusiivinen kiihdytys koronassa ja aurinkotuulesta etenevissä shokkiaalloissa. Käsitykset perustuvat aurinkotuulesta satelliiteilla tehtyihin korkeaenergiaisten hiukkasten havaintoihin, jotka voidaan karkeasti ottaen jakaa kahteen eri luokkaan: äkillisiin (impulsiivisiin) ja pitkäkestoisiin. Nimitykset tulevat havaintojen erilaisista aikaprofiileista – tosin muitakin eroja on.



Kuva 1: Esimerkki tyypillisestä (a) pitkäkestoisesta ja (b) äkillisestä hiukkastapahtumasta. Pitkäkestoista tapahtumaa hallitsevat protonit, äkillistä elektronit. Pieni piikki kuvassa (a) joulukuun 9. päivän tienoilla vastaa hetkeä, jolloin shokkiaalto on kohdannut satelliitin [13].

Äkilliset hiukkastapahtumat syntyvät roihupurkauksissa, joissa rekonnektio muuttaa magneettikenttiin varastoitunutta energiaa varausten kineettiseksi energiaksi. Tämä tapahtuu verrattain pienikokoisessa alueessa. Kiihtyneet hiukkaset syöksyvät rekonnektioalueesta avoimien kenttäviivojen suuntaisesti avaruuteen ja kohti Auringon pintaa. Hiukkassuihkujen vuorovaikutus muun plasman kanssa synnyttää säteilyä laajalla aallonpituuskaalalla. Muunmuassa relativistiset elektronisuihkut (energiat tyypillisesti 10 – 100 keV) lähettävät kovaa röntgeniä jarrutus säteilynä ja ionit gammasäteilyä törmätessään Auringon pintaan. Hiukkassuihkut aiheuttavat häiriöitä taustan plasman jakaumafunktiossa, mikä taas vahvistaa elektronien plasmaoskillaatiota radiotaajuuksilla. Säteilyn taajuus pienenee nopeasti ajan funktiona suihkujen liikkua harvempaan plasmaan. Nämä havainnot tunnetaan tyyppin III radiopurskeina ja ne ovat varsin tavallisia roihujen yhteydessä.

Pitkäkestoiset hiukkastapahtumat syntyvät koronassa ja heliosfäärissä etenevissä shokkiaalloissa, jotka voivat kiihdyttää hiukkasia useiden päivien ajan.

Diffusiivisessa shokkikiihdytyksessä varaukset siroavat shokin ympäristössä ja ylittävät sen moneen kertaan. Jokainen ylitys tuo lisäyksen varausten energiaan, ja mikäli sirontaan käytettävissä oleva aika on tarpeeksi suuri, lopullinen energia voi olla varsin korkea. Auringon kaasukehästä nouseva koronan massapurkaus voi, sen nopeuden ollessa Alfvénin nopeutta suurempi, puskea edellään shokkirintamaa, jonka helma pyyhkäisee laajan alueen koronassa. Kiihdytys jatkuu massapurkauksen liikkuesssa planeettainvälisessä avaruudessa. Myös shokit voimistavat plasmaoskillaatiota ja synnyttävät tyypin II radiopurskeita. Shokkien pienemmästä etenemisnopeudesta (~ 1000 km/s) johtuen purskeiden taajuus laskee hitaammin kuin kovan röntgenin roihupurkauksien yhteydessä. Myös massapurkauksien yhteydessä havaitaan roihuja pehmeässä röntgenissä, jotka ovat pitkäkestoisempia ja rauhallisempia kuin kovan röntgenin roihupurkaukset.

Kuvassa 1 on esimerkki tyypillisistä havainnoista aurinkotuulesa. Pitkäkestoista tapahtumaa hallitsevat lukumääräisesti korkeaenergiaiset protonit, äkillistä taasen elektronit. Aikaprofilien lisäksi tapahtumat eroavat toisistaan myös hiukkaskoostumuksissa ja raskaiden alkuaineiden ionisaatiotiloissa. Pitkäkestoisten tapahtumien alkuainekoostumukset vastaavat koronasta mitattuja koostumuksia. Äkillisissä havaitaan tavallista korkeampi $^3\text{He}/^4\text{He}$ - ja Fe/O -suhde verrattuna koronan arvoihin. Selkeä piirre pitkäkestoisissa tapahtumissa on myös niistä mitattu differentiaalisen energiaspektrin muoto, joka on yksinkertainen potenssilaki, $dN/dE \sim E^{-s}$. Vastaava riippuvuus energian ja hiukkasmäärän välillä havaitaan myös kosmisista säteistä.

Alkuaineiden ionisaatioasteita verrattaessa pitkäkestoisissa tapahtumissa heliumia raskaammat alkuaineet eivät tavallisesti ole täysin ionisoituneita. Esimerkiksi raudan ionisaatioaste on keskimäärin 14 ± 1 , joka vastaa raudan tilaa ~ 2 miljoonan kelvinin lämpötilassa. Äkillisissä tapahtumissa alkuaineet piihin asti saattavat olla täysin ionisoituneita ja raudan ionisaatioaste on keskimäärin 20.5 ± 1.2 vastaten ~ 10 MK lämpötilaa. Lämpötiloista edellinen vastaa koronaa ja tarkoittaa, että kiihtyneet hiukkaset voivat olla peräisin koronan termisestä plasmasta. Jälkimmäisessä tapauksessa rauta on kuumentunut tyypilliseen roihupurkauksesta mitattuun plasman lämpötilaan. Taulukossa 1 on vertailu havaintojen tyypillistä ominaisuuksista [13].

Edellä mainittua jakoa kiihdytysmekanismien välillä tukee myös hiukkashavaintoon liitetyn roihun sijainti Auringon kiekolla. Kovan röntgenin roihun kiihdyttämiä hiukkasia havaitaan vain, jos roihupurkaus sijaitsee alueella jossa mittalaitetta ja Aurinkoa yhdistävä spiraalin muotoinen magneettinen vuoputki kiinnittyy Auringon pintaan. Pitkäkestoisten tapahtumien yhteydessä on tutkittu pehmeän röntgenin roihuilun sijaintia. Ne jakautuvat likimain tasaisesti koko Auringon kiekolle, mikä tarkoittaa että korkeaenergiaisia hiukkasia tuottava mekanismi toimii laajalla alueella. On olemassa myös havaintoja pitkäkestoisista hiukkastapahtumista, joihin liitettävä muu aktii-

	Äkilliset tapahtumat	Pitkäkestoiset tapahtumat
Hiukkaset:	elektroneja	protoneja
${}^3\text{He} / {}^4\text{He}$	≈ 1	≈ 0.0005
Fe / O	≈ 1	≈ 0.1
H / He	≈ 10	≈ 100
Röntgenaktiivisuus:	äkillinen (minuutteja, kovaa röntgeniä)	pitkäkestoinen (tunteja, pehmeää röntgeniä)
Hiukkastapahtuman kesto:	tunteja	päiviä
Radiopurskeet:	tyypit III & V	tyypit II & IV
Koronagrafihavainnot:	ei mitään	koronan massapurkaus 96%
Aurinkotuulihavainnot: (tapahtumia / vuosi aktiivisuusmaksimin aikaan)	korkeaenergiaisia hiukkasia ≈ 1000	hyvin korkeaenergiaisia hiukkasia ≈ 100

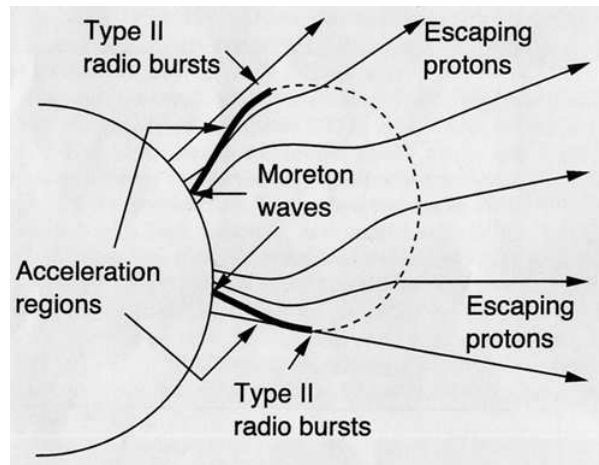
Taulukko 1: Yhteenveto aurinkotuulesta havaituista korkeaenergisistä hiukkasista havainnon keston mukaan jaoteltuna. Keskimäinen sarake (äkilliset) vastaa tyypillisiä roihuissa kiihdytettyjä hiukkasia, viimeinen shokeissa [12].

visuus sijaitsee kiekon takana. Esimerkkinä mainittakoon purkautuva protuberanssi [13].

Viimeisen vuosikymmenen aikana saadut havainnot ovat viitanneet ajateltua monimutkaisempaan kiihdytysprosessiin massapurkausten yhteydessä. Mikäli purkauksen nopeus ei ole kovin suuri (luokkaa 300 – 800 km/s) lähellä Aurinkoa, pitkäkestoisen hiukkastapahtuman syntyminen näyttäisi vaativan shokkirintaman etenemistä laajalla alueella koronassa. Tähän nopeushaarukkaan kuuluvien purkausten yhteydessä havaitaan tyypillisesti myös roihuilua pehmeässä röntgenissä ja tyypin II radiopurskeita [14].

Toisinaan roihupurkauksen yhteydessä esiintyy roihun ympärille laajeneva rengasmainen häiriö $H\alpha$ -aallonpituudella tai äärimmäisellä UV-alueella otetuissa kuvissa. Kuvissa havaittavat EIT-aallot (SOHO:n instrumentin mukaan) etenevät tyypillisesti ~ 400 km/s nopeudella ja niiden on tulkittu olevan nopeita Alfvénin aaltoja. Samassa yhteydessä voidaan havaita myös laajeneva tummentuma koronassa. Tumentuman on spektroskooppisten havaintojen perusteella päätelty johtuvan nimenomaan massan poistumisesta, ei lämpötilavaihteluista [8]. Kromosfääristä otetuissa $H\alpha$ -kuvissa löytäjänsä mukaan nimetyt Moreton-aallot etenevät noin kaksin-kolminkertaisella nopeudella (~ 1000 km/s) EIT-aaltoihin verrattuna. Suuresta nopeudesta johtuen ne ovat todennäköisesti plasmassa eteneviä shokkiaaltoja. Moreton-aaltoja ei aina havaita $H\alpha$ -kuvissa, mutta niiden olemassaolo on voitu epäsuorasti päätellä häiriöistä läheisten protuberanssien liikkeissä [12].

EIT- ja Moreton-aaltojen mahdollisesta yhteydestä toisiinsa – tai muihin Auriongon aktiivisiin ilmiöihin – ei ole vielä yksimielisyyttä. Kumpiakin on ha-



Kuva 2: Roihuilun tai massapurkauksen synnyttämän shokkiaallon eteneminen lähellä Aurinkoa. Kohti pintaa taattuva shokki näkyy kromosfäärissä Moreton-aaltoina ja radiotaajuuksilla tyyppin II havaintoina. Shokki kiihdyttää hiukkasia, jotka karkaavat avaruuteen alavirran (alue shokkirintaman takana) puolella pitkin avoimia kenttäviivoja ja jotka voidaan havaita aurinkotuulesta. [14].

vaiettu pitkäkestoisten hiukkastapahtumien yhteydessä. Viimeaikoina on pehmeässä röntgenissä havaittu roihualueen ympärille leviäviä shokkiaaltoja, jotka taistuvat edetessään kohti Auringon pintaa. Tämä havainto tukisi mallia räjähdysten (roihiilu) ympärillä leviävästä “paineaallostaa”. Alfvénin nopeus saavuttaa maksiminsa koronassa $\sim 2R_{\odot}$ etäisyydellä Auringon pinnasta, joten aaltorintaman nopeus korkeammalla on suurempi kuin lähellä Auringon pintaa. Moreton-aallot voitaisiin tulkita tämän räjähdysaallon kromosfääriä pyyhkiväksi helmaksi ja shokin eteneminen korkeammalla havaittaisiin tyyppin II radiosäteilynä (kuva 2). Shokissa kiihtyneet protonit pakenevat avoimia kenttäviivoja pitkin Auringosta planeettainväliseen avaruuteen.

Edellä mainittujen aktiivisten ilmiöiden syy-seuraussuhteet ovat edelleen aktiivisen tutkimuksen kohteena. Ilmiöiden vertaamista toisiinsa vaikeuttavat muun muassa aikaerot eri instrumenttien ottamien kuvien välillä. Ei myöskään ole selvää, mitä tarkkaan ottaen vaaditaan shokkiaallon ja mitattavissa olevan pitkäkestoisen hiukkastapahtuman syntymiseen. Diffusiivinen shokki-kiihdytys kykenee tuottamaan alavirran puolelle havaintoja vastaavan energiaspektrin. Aikaerot pehmeän röntgenin ja aurinkotuulen hiukkahavaintojen välillä vaihtelevat minuuteista kymmeniin minuutteihin. Ne vastaavat aikaa, joka laajenevalta shokkiaallolta kestää Auringon kiekon kokoisen alueen peittämiseen.

Tämän opinnäytteen tarkoituksena on tutkia, kykeneekö koronassa etenevä

shokki todella tuottamaan tarpeeksi korkeita energioita diffusiivisella kiihdytyksellä. Korkeaenergiaisia hiukkasia on niin vähän, etteivät ne vaikuta merkittävästi magneettikenttään tai taustan plasman virtaukseen. Plasman perusominaisuus on myös varausten välisten törmäysten puuttuminen, joten kiihdytysprosessia voidaan mallintaa yksihiukkasliikkeellä. Testihiukkassimulaatiolla laskettiin yksittäisten protonien ratoja tasomaisen shokkiaallon ympäristössä sen edetessä koronassa. Auringonpilkkuparin ympäristöä koronassa mallinnettiin lähellä pintaa sijaitsevalla voimakkaalla bipolilla. Pakenevan aurinkotuulen synnyttämä avoimien kenttäviivojen alue tuotettiin Auringon keskipisteessä sijaitsevalla monopolilla. Opinnäytteen luvuissa 2 ja 3 esitellään yksihiukkasteoria ja magnetohydrodynamiikka niiltä osin, kuin shokkikiihdytyksen käsittely vaatii. Itse shokkikiihdytys käsitellään luvuissa 4 ja 5. Loput luvut sisältävät mallin testaamiseen rakennetun simulaation ja sillä saatujen tulosten käsittelyn.

2 Varatun hiukkasen liike

Varatun hiukkasen liikeyhtälö sähkömagneettisessa kentässä saadaan Lorentzin voimasta

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (2.1)$$

Tämän lisäksi hiukkaseen voi vaikuttaa muita kuin sähkömagneettista alkuperää olevia voimia, esimerkiksi gravitaatio. Nämä muut voimat ovat yksittäisten ionien ja elektronien tapauksissa yleensä niin heikkoja, että ne voidaan käytännön laskuissa jättää huomiotta. Lorentzin voimalle ei ole löydetty itsekonsistenttia ratkaisua yleisille ajasta ja paikasta riippuville kentille. Olettaen kenttien epähomogeenisuudet heikoiksi voidaan häiriöteorian avulla löytää varauksen liikkeelle approksimatiivinen ratkaisu *johtokeskusapproksimaatiossa*.

2.1 Johtokeskusapproksimaatio

Ennen siirtymistä häiriöteorialla saatavaan ratkaisuun määritellään joitakin käsitteitä homogeenisen magneettikentän avulla, jotka ovat hyödyllisiä kuvattaessa varauksen liikettä. Nopeus on yleensä kätevää jakaa magneettikentän suuntaiseen ja sitä vastaan kohtisuoraan komponentteihin, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}$, koska magneettikenttä ei aiheuta voimaa kentän suuntaan. Tällöin saadaan kummallekin komponentille oma liikeyhtälö

$$m \frac{d\mathbf{v}_{\parallel}}{dt} = 0, \quad (2.2)$$

$$m \frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = q\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B}. \quad (2.3)$$

Kentän suuntainen nopeus on siis vakio ja poikittaisessa suunnassa liike on ympyräliikettä, jonka *gyrosäde* ja *gyrotaajuus* ovat

$$\rho = \frac{mv_{\perp}}{|q|B}, \quad (2.4)$$

$$\omega_{gyro} = \frac{qB}{m}. \quad (2.5)$$

Ympyräliikkeen suunta määräytyy siten, että positiivinen varaus pyörii vastapäivään ja negatiivinen myötäpäivään katsottaessa liikettä magneettikentän suuntaan. Liikkeiden superpositioksi tulee tietyn kenttäviivan ympärille kiertyvä ruuviviiva. Nopeusvektorin ja magneettikentän välistä kulmaa varauksen paikassa kutsutaan *nousukulmaksi*,

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}}{vB}\right). \quad (2.6)$$

Tällä määritelmällä nousukulma saa arvoja väliltä $[0, \pi]$ siten, että kentän suuntaan etenevälle varaukselle $\alpha \in [0, \pi/2]$. Varauksen paikka voidaan jakaa sijainniksi kenttäviivalla ja siirtymäksi pyörimisliikkeen hetkelliseen paikkaan,

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}_{jk} + \vec{\rho}, \quad (2.7)$$

missä \mathbf{R}_{jk} on hetkellisen pyörähdyskeskuksen eli *johtokeskuksen* paikka ja

$$\vec{\rho} = -\frac{m}{qB^2} \mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B}. \quad (2.8)$$

gyroliikkeen säde vektorimuodossa. Koordinaatistoa, joka kulkee pitkin kenttäviivaa nopeudella \mathbf{v}_\parallel , kutsutaan *johtokeskuskoordinaatistoksi*. Johtokeskuskoordinaatistossa varauksen liike on pelkästään pyörimisliikettä johtokeskuksen ympärillä. Pyörimisliike synnyttää sähkövirran $I = 2\pi q/\omega_{gyro}$, johon liittyy *magneettinen momentti*

$$\mu = I\pi\rho^2 = \frac{1}{2} \frac{mv_\perp^2}{B} = \frac{W_\perp}{B}, \quad (2.9)$$

missä W_\perp on gyroliikkeen kineettinen energia.

Edellä määriteltyjä suureita käytettäessä on tärkeää huomata, että riippuen käytetystä koordinaatistosta niiden hetkelliset arvot voivat riippua gyroliikkeen vaihekulmasta jolloin ne on ymmärrettävä gyroliikkeen yli keskiarvoistettuina suureina. Tästä johtuen niiden arvot on järkevää laskea vain johtokeskusta vastaavassa koordinaatistossa, jossa varauksella ei ole kulkeutumista (seuraava kappale) kenttäviivoihin nähden kohtisuoraan suuntaan.

2.2 Heikosti epähomogeenisen magneettikentän vaikutus

Monissa käytännön esimerkeissä tilanteeseen liittyviä ilmiöitä voidaan ymmärtää tuntematta hiukkasen rataa tarkasti. Esimerkkejä tällaisista tapauksista ovat tilanteet, joissa systeemin magneettikenttä muuttuu vain vähän yhden gyrokierroksen matkalla tai gyrokierrokseen kuluva aika on paljon muita aikaskaaloja pienempi. Varaus näkee tällöin magneettikentän likimain homogeenisena ja liike voidaan redusoida pelkästään johtokeskuksen liikkeeksi pitkin kenttäviivaa. Kehitetään magneettikenttä Taylorin sarjaksi johtokeskuksen ympäristössä ja otetaan mukaan termit lineaarisiin muutoksiin asti,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) \approx \mathbf{B}_0 + \vec{\rho} \cdot (\nabla \mathbf{B}_1) \approx \mathbf{B}_0 + (\vec{\rho} \cdot \nabla) \mathbf{B}_1. \quad (2.10)$$

Alaindekseillä tarkoitetaan tässä termien kertalukua. Magneettikentän kaikki kolme komponenttia voivat kukin muuttua x, y, z -suuntiin, joten lineaarisia

epähomogeenisuuksia kuvaa 3×3 -tensori

$$\nabla \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \partial_x B_x & \partial_x B_y & \partial_x B_z \\ \partial_y B_x & \partial_y B_y & \partial_y B_z \\ \partial_z B_x & \partial_z B_y & \partial_z B_z \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

jonka eri komponentit kuvaavat kentän divergenssiä, kaarevuutta ja leikkausjännitystä. Sijoittamalla sarjakehitelmä Lorentzin voimaan ja kirjoittamalla varauksen paikka johtokeskuksen paikan ja gyrovektorin avulla saadaan

$$m(\dot{\mathbf{V}}_{jk} + \ddot{\vec{\rho}}) = q(\mathbf{V}_{jk} + \dot{\vec{\rho}}) \times (\mathbf{B}_0 + [\vec{\rho} \cdot \nabla] \mathbf{B}_1). \quad (2.12)$$

Eri termien vaikutuksien tutkimiseksi käytetään lokaalia johtokeskuksen paikkaan kiinnitettyä sylinterikoordinaatistoa, missä kantavektori \mathbf{e}_1 osoittaa magneettikentän suuntaan. Käytetään gyroliikkeelle yritettä

$$\begin{aligned} \vec{\rho} &= \rho(\mathbf{e}_2 \sin \phi + \mathbf{e}_3 \cos \phi), \\ \dot{\vec{\rho}} &= \rho\omega(\mathbf{e}_2 \cos \phi - \mathbf{e}_3 \sin \phi), \\ \ddot{\vec{\rho}} &= -\rho\omega^2(\mathbf{e}_2 \sin \phi + \mathbf{e}_3 \cos \phi) = -\omega^2 \vec{\rho}, \end{aligned}$$

missä ϕ on gyroliikkeen vaihekulma. Aikaderivaatat ovat likimain oikein, mikäli $\rho\omega \gg \frac{d\rho}{dt}$ ja $\omega^2 \gg \frac{d\omega}{dt}$. Johtokeskuksen approksimatiivinen liikeyhtälö saadaan keskiarvoistamalla liikeyhtälö (2.12) gyroliikkeen vaihekulman yli. Gyrovektorin määritelmän perusteella $m\ddot{\vec{\rho}} = q\dot{\vec{\rho}} \times \mathbf{B}_0$ (2.4) ja lisäksi termi $q\mathbf{V}_{jk} \times \mathbf{B}_0$ ei riipu vaihekulmasta. Keskiarvoistetaan kaksi jäljellejäävää termiä erikseen olettaen lisäksi, ettei johtokeskuksen nopeus muutu paljoa yhden gyrokierroksen aikana:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \oint \mathbf{V}_{jk} \times [\vec{\rho} \cdot \nabla] \mathbf{B}_1 d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \rho \mathbf{V}_{jk} \times \left[\oint \sin \phi (\mathbf{e}_2 \cdot \nabla) \mathbf{B}_1 d\phi + \oint \cos \phi (\mathbf{e}_3 \cdot \nabla) \mathbf{B}_1 d\phi \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \rho \mathbf{V}_{jk} \times \left[(\mathbf{e}_2 \cdot \nabla) \mathbf{B}_1 \oint \sin \phi d\phi + (\mathbf{e}_3 \cdot \nabla) \mathbf{B}_1 \oint \cos \phi d\phi \right] = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \oint \dot{\vec{\rho}} \times [\vec{\rho} \cdot \nabla] \mathbf{B}_1 d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \rho^2 \omega \oint (\mathbf{e}_2 \cos \phi - \mathbf{e}_3 \sin \phi) \times \left[(\mathbf{e}_2 \sin \phi + \mathbf{e}_3 \cos \phi) \cdot \nabla \right] \mathbf{B}_1 d\phi \\ &= \frac{\rho^2 \omega}{2\pi} \left[\mathbf{e}_2 \times (\mathbf{e}_3 \cdot \nabla) \mathbf{B}_1 \oint \cos^2 \phi d\phi - \mathbf{e}_3 \times (\mathbf{e}_2 \cdot \nabla) \mathbf{B}_1 \oint \sin^2 \phi d\phi \right] \\ &= \frac{\rho^2 \omega}{2} \left[\mathbf{e}_2 \times (\mathbf{e}_3 \cdot \nabla) \mathbf{B}_1 - \mathbf{e}_3 \times (\mathbf{e}_2 \cdot \nabla) \mathbf{B}_1 \right] = -\mu \nabla B_1 \end{aligned}$$

Jälkimmäisessä laskussa hakasuluissa olevan lausekkeen kerroin on magneettinen momentti ja ensimmäisen lausekkeen aukikirjoittamisen jälkeen on jätetty pois integroinnissa nollaan menevät ristitermit. Kaiken kaikkiaan magneettikentän epähomogeenisuudet aiheuttavat siis johtokeskukseen *gradienttivoiman* $\mathbf{F}_{\nabla B} = -\mu\nabla B$ ja johtokeskukselle saadaan liikeyhtälö

$$m\frac{d\mathbf{V}_{jk}}{dt} = q(\mathbf{V}_{jk} \times \mathbf{B}) - \mu\nabla B. \quad (2.13)$$

Tämä muoto on varsin hyödyllinen laskettaessa johtokeskuksen rataa numeerisesti. Magneettikentällä on lähteettömyydestä johtuen gradienttien lisäksi aina myös kaarevuutta. Varaus pyrkii seuraamaan tiettyä kenttäviivaa, mutta kaarevuudesta johtuen johtokeskuskoordinaatisto ei ole inertiaalinen. Johtokeskus on aina hetkellisesti ympyräradalla, jolloin siihen vaikuttaa keskihakuisvoima [4]

$$\mathbf{F}_C = -\frac{mV_{jk,\parallel}^2}{R}\mathbf{n}, \quad (2.14)$$

missä R on ympyräradan hetkellinen säde (kentän kaarevuussäde) ja \mathbf{n} yksikkövektori tähän suuntaan. Differentiaaligeometrisen tarkastelun avulla kaarevuusvoima voidaan kirjoittaa muotoon

$$\mathbf{F}_C = -\frac{mV_{jk,\parallel}^2}{B^2}(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} \quad (2.15)$$

ja se sisältyy liikeyhtälön (2.13) vasemman puolen termiin. Käytetyssä approksimaatiossa gradienttien ja kaarevuuksien vaikutukset ovat lineaarisia. Ne laittavat johtokeskuksen kulkeutumaan magneettikentän poikki, josta lisää seuraavassa kappaleessa.

2.3 Johtokeskuksen kulkeutumismisnopeudet

Mikäli johtokeskukseen vaikuttaa magneettikentän lisäksi jokin voima \mathbf{F} , esimerkiksi sähköinen voima $q\mathbf{E}$, ovat liikeyhtälöt

$$m\frac{d\mathbf{V}_{jk,\parallel}}{dt} = \mathbf{F}_{\parallel}, \quad (2.16)$$

$$m\frac{d\mathbf{V}_{jk,\perp}}{dt} = \mathbf{F}_{\perp} + q(\mathbf{V}_{jk,\perp} \times \mathbf{B}). \quad (2.17)$$

Pitkittäisessä suunnassa liike on kiihtyvää. Poikittaisessa liikeyhtälössä voidaan voima \mathbf{F}_{\perp} kirjoittaa muodossa

$$\mathbf{F}_{\perp} = -\frac{\mathbf{F}_{\perp} \times \mathbf{B} \times \mathbf{B}}{B^2}$$

ja ottaa ristitulo yhteiseksi tekijäksi,

$$m\frac{d\mathbf{V}_{jk,\perp}}{dt} = q\left(\mathbf{V}_{jk,\perp} - \frac{\mathbf{F}_{\perp} \times \mathbf{B}}{qB^2}\right) \times \mathbf{B}. \quad (2.18)$$

Siirtymällä nopeudella

$$\mathbf{V}_{jk,\perp} = \mathbf{V}' + \frac{\mathbf{F}_\perp \times \mathbf{B}}{qB^2}$$

liikkuvaan koordinaatistoon eliminoiduu poikittaisen liikeyhtälön oikea puoli. Jos muunnosnopeus \mathbf{V}' ei ole vakio, tulee liikeyhtälön vasemmalle puolelle lisätermiä aikaderivaatasta. Käytännössä tulos tarkoittaa, että varaukseen vaikuttavan ei-magneettisen voiman poikittainen komponentti antaa johtokeskukselle *kulkeutumisnopeuden* $\frac{\mathbf{F}_\perp \times \mathbf{B}}{qB^2}$ kenttäviivoihin nähden kohtisuoraan suuntaan. Mikäli voima \mathbf{F} ei riipu hiukkasen varauksesta, kulkeutuvat erimerkkiset varaukset eri suuntiin ja systeemiin syntyy sähkövirta. Avaruusplasmoissa magneettikentän suuntaiset sähkökentät katoavat nopeasti, koska ioneja huomattavasti kevyemmät elektronit reagoivat nopeasti mahdollisiin sähkökenttiin ja niiden liikkeestä syntyvä varausseparaatio neutralisoi ulkoisen sähkökentän. Sen sijaan sähkökentän poikittainen komponentti synnyttää *sähköisen kulkeutumisnopeuden*

$$\mathbf{V}_{E \times B} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}. \quad (2.19)$$

Sähkökentän heikosta ajallisesta vaihtelusta syntyy *polarisaatiokulkeutuminen* [4]

$$\mathbf{V}_p = \frac{m}{qB^2} \frac{d\mathbf{E}_\perp}{dt}. \quad (2.20)$$

Muita tärkeitä kulkeutumisia ovat magneettikentän epähomogeenisuuksista aiheutuva *gradienttikulkeutuminen*

$$\mathbf{V}_{\nabla B} = \frac{\mu}{q} \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2}, \quad (2.21)$$

jolla on myös magneettikentän suuntainen komponentti, sekä magneettikentän kaarevuudesta johtuva *kaarevuuskulkeutuminen*

$$\mathbf{V}_C = -\frac{mV_\parallel^2[(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}] \times \mathbf{B}}{qB^4}. \quad (2.22)$$

Sähköistä kulkeutumista lukuunottamatta nämä kaikki riippuvat hiukkasen varauksesta ja ovat siten vastakkaissuuntaisia elektroneille ja ioneille. Varauksen näkökulmasta kentät voivat muuttua joko ajassa tai sen itse liikkuessaan uuteen paikkaan, joten liikeyhtälössä (2.18) aikaderivaatta on kirjoitettava konvektiivisena $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}' \cdot \nabla$. Tämän avulla johtokeskuksen liike voidaan kirjoittaa muodossa [15]

$$\mathbf{V}_{jk} = V_\parallel \mathbf{e}_B + \mathbf{V}_{E \times B} + \mathbf{V}_{\nabla B} + \mathbf{V}_K, \quad (2.23)$$

missä esiintyvään *kiihtyvyysskulkeutumiseen* on yhdistetty loput termit,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_K = \frac{m\mathbf{B}}{qB^2} \times & \left(\frac{V_\parallel^2(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}}{B^2} + \frac{V_\parallel}{B} \left[(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{V}_{E \times B} + (\mathbf{V}_{E \times B} \cdot \nabla)\mathbf{B} \right] \right. \\ & \left. + (\mathbf{V}_{E \times B} \cdot \nabla)\mathbf{V}_{E \times B} + V_\parallel \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{e}_B + \frac{\partial \mathbf{V}_{E \times B}}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (2.24)$$

2.4 Magneettisen momentin invarianssi

Edellisessä kappaleessa saatiin johtokeskukselle approksimatiivinen likeyhtälö, jossa esiintyy magneettinen momentti μ . Magneettinen momentti osoittautuu liikevakioksi, kunhan oletukset magneettikentän heikoista epähomogeenisuuksista ovat voimassa. Staattinen magneettikenttä ei tunnetusti tee työtä, joten varatun hiukkasen kineettinen energia pysyy vakiona,

$$\frac{d}{dt}(W_{\parallel} + W_{\perp}) = 0. \quad (2.25)$$

Heikosti epähomogeenisessa kentässä johtokeskuksen pitkittäinen likeyhtälö on

$$m \frac{dV_{\parallel}}{dt} = -\mu \frac{\partial B}{\partial s}, \quad (2.26)$$

missä s tarkoittaa siirtymää kenttäviivaa pitkin. Kertomalla yhtälö puolittain pitkittäisellä nopeudella $V_{\parallel} = \frac{ds}{dt}$ ja kirjoittamalla magneettinen momentti poikittaisen energian avulla saadaan

$$\begin{aligned} m V_{\parallel} \frac{dV_{\parallel}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m V_{\parallel}^2 \right) = -\frac{W_{\perp}}{B} \frac{\partial B}{\partial s} \frac{ds}{dt}, \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} W_{\parallel} &= -\frac{W_{\perp}}{B} \frac{dB}{dt}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Magneettikentän aikaderivaatta on jälleen käsitettävä konvektiivisena derivaattana johtokeskuksen koordinaatistossa. Sijoittamalla saatu tulos yhtälöön (2.25), tulee poikittaisen energian aikaderivaataksi

$$\frac{d}{dt} W_{\perp} = \frac{W_{\perp}}{B} \frac{dB}{dt}. \quad (2.28)$$

Toisaalta voidaan kirjoittaa

$$\frac{d}{dt} W_{\perp} = \frac{d}{dt} \left(\frac{W_{\perp} B}{B} \right) = \frac{W_{\perp}}{B} \frac{dB}{dt} + B \frac{d}{dt} \left(\frac{W_{\perp}}{B} \right). \quad (2.29)$$

Yhdistämällä yhtälöt (2.28) ja (2.29) saadaan

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{W_{\perp}}{B} \right) = 0, \quad (2.30)$$

eli magneettinen momentti on liikevakio kunhan kappaleen 2.2 oletukset kentän epähomogeenisuuksista ovat voimassa. Magneettinen momentti säilyy myös heikosti epähomogeenisessa sähkökentässä [1].

2.5 Magneettinen peilivoima

Magneettisen momentin invarianssin ja gradienttivoiman avulla voidaan varauksen liikettä ymmärtää jo kohtuullisen hyvin. Hiukkasen liikkuesssa kohti

voimistuvaa ja staattista magneettikenttää, pyrkii gradienttivoima jarruttamaan johtokeskuksen kentän suuntaista liikettä riippumatta varauksen etumerkistä. Tällöin hiukkasen pitkittäinen liike-energia pienenee, joten kokonaisenergian säilyessä vakiona täytyy poikittaisen liike-energian kasvaa vastaavalla määrällä.

Mikäli kentän voimakkuus kasvaa tarpeeksi, menee kentän suuntainen nopeus lopulta nolleen ja johtokeskus pysähtyy. Gradienttivoima vaikuttaa myös tässä pysähtymispisteessä heikkenevän kentän suuntaan, joten se ”peilaa” hiukkasen liikkumaan alkuperäiseen nopeuteen nähden vastakkaiseen suuntaan. Mikäli kenttäviivat, joita pitkin johtokeskus liikkuu, kulkevat kummastakin päästä tällaisen *peilipisteen* kautta, on johtokeskus pakotettu edestakaiseen ponnahteluun näiden pisteiden välille.

Esimerkiksi Maan magneettikenttä toimii tällaisena *magneettisena pullona*. Kenttä on muutaman Maan säteen etäisyydelle asti likimain dipolaarinen. Näillä etäisyyksillä varaukset ponnahtelevat edestakaisin magneettisilla napaluilla sijaitsevien peilipisteiden välillä. Dipolikentän tapauksessa kaarevuus- ja gradienttikulkeutuminen osoittavat samaan suuntaan, ja ne kuljettavat ioneja ja elektroneja Maan ympäri eri suuntiin. Tällaiset vangitut varaukset synnyttävät Maata kiertäviä rengasvirtoja ja säteilvyöhykkeitä. Tietokonesimulaation magneettikenttämallissa käytetään magneettista pulloa hyödyksi – shokkiin injektoidut kiihdytettävät protonit vangitaan koronan ja shokin peilipisteiden väliin.

Edellä mainittua edestakaista ponnahtusliikettä voidaan käsitellä magneettisen momentin kautta, joka kirjoitetaan nousukulman avulla muodossa

$$\mu = \frac{W \sin^2 \alpha}{B}. \quad (2.31)$$

Kirjoitetaan magneettinen momentti kahdessa eri paikassa ja supistetaan vakioinen kokonaisenergia, jolloin

$$\frac{\sin^2 \alpha_1}{B_1} = \frac{\sin^2 \alpha_2}{B_2}. \quad (2.32)$$

Jos hiukkasen nousukulma ja kentän voimakkuus tunnetaan yhdessä paikassa (alaindeksi 1), voidaan tästä laskea nousukulman arvo muualla:

$$\sin \alpha_2 = \sin \alpha_1 \sqrt{\frac{B_2}{B_1}}. \quad (2.33)$$

Johtokeskuksen lähestyessä peilipistettä lähestyy nousukulma α_2 arvoa $\frac{\pi}{2}$. Mikään realistinen magneettikenttä ei voi voimistua loputtomiin, joten alunperin tarpeeksi pienen nousukulman omaavat varaukset pääsevät kyseisen pisteen läpi. Rajatapaus, jossa kenttä juuri ja juuri kykenee pysäyttämään

kentänsuuntaisen liikkeen peilipisteeseen, on alkuperäisessä paikassa mitattu nousukulma

$$\alpha_1 = \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{B_1}{B_2}} \right). \quad (2.34)$$

Varaukset, joiden nousukulma on tätä kriittistä nousukulmaa pienempi, pääsevät peilipisteen läpi ja niiden sanotaan olevan *vuotokartiassa*. Maan tapauksessa tällaisena peilipisteenä voidaan pitää ilmakehän yläosia. Jos hiukkasella on riittävän suuri kentänsuuntainen nopeus kaukana Maasta, pääsee se vuorovaikuttamaan ilmakehän neutraalien atomien kanssa (josta voi syntyä esimerkiksi revontulia).

Auringon koronassa tällaisia peilipisteitä voi sijaita esimerkiksi auringonpilkuparien lähistöllä, jotka synnyttävät dipolikenttää muistuttavia suljettujen kenttäviivojen alueita. Suljetuilla kenttäviivoilla tarkoitetaan sellaisia kenttäviivoja, jotka kulkevat auringonpilkusta toiseen eivätkä päädy planeettainväliseen avaruuteen. Lisäksi shokkiaallot (seuraava luku) ovat eräänlaisia liik kuvia magneettisia peilejä.

2.6 Energiamuutoksista

Varatun hiukkasen energian muuttumiseen liittyy käytännössä aina sähkökenttä joko suoraan tai ajallisesti muuttuvan magneettikentän kautta. Tutkittaessa varauksen liikettä monimutkaisessa kenttäkonfiguraatiossa useat eri mekanismit voivat aiheuttaa muutoksia varauksen energiassa. Tässä esitellään niistä muutama. Johtokeskusapproksimaatiossa hetkellinen teho voidaan kirjoittaa muotoon [1]

$$\frac{dW}{dt} = \mu \frac{\partial B}{\partial t} + q \mathbf{V}_{jk} \cdot \mathbf{E}. \quad (2.35)$$

Oikean puolen ensimmäinen termi kuvaa johtokeskuksen paikassa ajallisesti kasvavan magneettivuon aiheuttamaa energian lisäystä eli *betatronikiihdytystä*, toinen termi on yksinkertaisesti johtokeskuksen kulkema matka sähkökentän suuntaan. Tämä sisältää myös tilanteet, joissa muiden voimien aiheuttamat kulkeutumisnopeudet liikkuttavat johtokeskusta magneettikenttää vastaan kohtisuoran sähkökentän suuntaan.

Toisenlainen betatroniefekti syntyy, mikäli johtokeskus kulkeutuu kenttäviivojen poikki voimistuvaan magneettikenttään (*Adiabaattinen kuumennus*). Magneettisen momentin säilymisestä saadaan

$$\frac{W_{\perp,2}}{W_{\perp,1}} = \frac{B_2}{B_1}, \quad (2.36)$$

jolloin $W_{\perp,2} > W_{\perp,1}$ mikäli $B_2 > B_1$. Poikittainen energia kasvaa lineaarisesti magneettikentän voimakkuuden mukana. Tähän ilmiöön perustuu myös

magneettinen pumppaus, jossa magneettikenttää voimistetaan ja heikennetään syklisesti riittävän hitaasti (verrattuna gyroaikaan $t = 2\pi/\omega_{gyro}$) jolloin magneettinen momentti säilyy vakiona. Magneettikentän puristukset eivät aiheuta nettomuutosta pitkittäiseen energiaan. Jos jokin mekanismi, esimerkiksi sirona, muuttaa varausten nousukulmaa magneettikentän ollessa kokoonpuristettuna, saa osa hiukkasista lisäyksen pitkittäiseen energiaan, joka ei katoa laajentumisen aikana. Jatkamalla tätä usean pumppauksen ajan saa pieni osa hiukkaspopulaatiosta jatkuvaa lisäystä energiaan [11].

3 Plasman shokkiaallot

Aliäänisellä nopeudella virtaavan fluidin kohdatessa esteen täytyy virtauksen muotoutua sellaiseksi, että se kiertää kyseisen esteen. Aivan kappaleen eteen syntyvässä *stagnaatiopisteessä* fluidin molekyylien nopeus pienenee merkittävästi ja molekyylit pakkautuvat lähemmäs toisiaan eli fluidi puristuu. Hie-
man taaempaan tulevat hiukkaset puolestaan törmäävät näihin molekyyli-
hin ja niin edelleen. Törmäysten kautta tieto esteestä välittyy jonkin matkaa
ylävirtaan ja virtaus voi muotoutua sellaiseksi, että se kiertää esteen “pe-
hmeästi”. Molekyylien välisten törmäyksien vapaa matka ja törmäystaajuus
(eli äänennopeus) kertovat, kuinka nopeasti tieto esteestä kulkee.

Kysymys kuuluukin: mitä tapahtuu, kun fluidin virtausnopeus kasvatetaan
yliaääniseksi tai virtauseste itse liikkuu yliaäänisellä nopeudella? Ylävirran mo-
lekyylit eivät enää saa tietoa esteestä vaan puskevat hyvin lähelle kappaleen
pintaa, työntäen aiemman fluidin väkisin pois. Lähelle estettä syntyy shok-
kiaalto, joka muuttaa fluidin tiheyttä, painetta, entropiaa ja virtausnopeutta
merkittävästi. Tällaista shokkiaaltoa ei voida tarkasti kuvata hydrodynami-
ikalla. Virtausta ennen ja jälkeen shokin (tarpeeksi kaukana) on kuitenkin
mahdollista kuvata hydrodynamiikalla ja itse shokkia voidaan käsitellä ää-
rettömän ohuena epäjatkuvuutena virtauksen parametreissa. Tarkastelemalla
massan-, liikemäärän- ja energiankuljetusyhtälöiden muutoksia epäjatkuvuu-
den yli saadaan niin kutsutut *Rankinen ja Hugoniotin hyppyehdot*.

Avaruusplasmamat ovat usein hyvin ionisoituneita ja törmäyksettömiä. Tör-
mäyksettömyys johtuu ennen kaikkea siitä, että plasma on harvaa. Lisäksi
Coulombin voima on pitkän kantaman voima, jolloin se ohjailee lähekkäiset
varaukset “pehmeästi” toistensa ohi. Positiiviset ionit pyrkivät keräämään lä-
helleen negatiivisia elektroneja, jolloin niiden varaus varjostuu (*Debyen var-
jostus*). Debyen varjostus tekee plasmasta kvasineutraalia riittävän suurilla
mittakaavoilla.

Varausten välisten törmäyksien puuttuminen herättää kysymyksen, esiintyy-
kö plasmassa shokkiaaltoja samaan tapaan kuin ionisoitumattomassa “taval-
lisessa” fluidissa. Vastaus on: kyllä esiintyy. Plasmoissa hiukkasten vuorovai-
kus sähkömagneettisen kentän välityksellä voi ottaa törmäyksiä vastaavan
roolin. Magneettikenttä estää tehokkaasti varauksien liikettä siihen nähden
poikittaiseen suuntaan. Esimerkiksi magnetoitunut planeetta voi toimia tar-
vittavana virtausesteenä plasmalle. Plasman makroskooppista virtausta ku-
vataan *magnetohydrodynamiikalla* (MHD), joka on hydrodynamiikan vastine
sähköisesti varautuneen fluidin virtaukselle magneettikentässä. MHD:n yh-

tälöt kokoonpuristuvalla yksinestefluidille kirjoitettuna ovat

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{V}) = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{d}{dt}(\rho_m \mathbf{V}) + \nabla p - \mathbf{J} \times \mathbf{B} = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_m \left(\frac{1}{2} v^2 + U \right) + \frac{B^2}{2\mu_0} \right] = -\nabla \cdot \mathbf{q}, \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q} = & (\rho_m U + \frac{1}{2} \rho_m V^2 + \frac{B^2}{\mu_0} + p) \mathbf{V} - \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} (\mathbf{V} + \frac{\mathbf{J}}{ne}) \cdot \mathbf{B} \\ & - \frac{n \mathbf{J} \times \mathbf{B}}{\mu_0} + \frac{\mathbf{J} B^2}{\mu_0 ne} + \frac{m_e \mathbf{B}}{\mu_0 ne^2} \times \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Yllä olevat yhtälöt kuvaavat hiukkasvirran jatkuvuutta sekä liikemäärän ja energian siirtymistä. Yhtälöissä n ja ρ_m ovat lukumäärä- ja massatiheys ja U sisäinen energia massayksikköä kohden. Kenttäsuureet \mathbf{V} , \mathbf{J} ja \mathbf{B} puolestaan ovat nopeus, sähkövirrantiheys ja magneettikenttä ja p skalaarisesti oletettu paine. \mathbf{q} on lämpövuoto [1].

Yhtälöt täytyy vielä täydentää Maxwellin yhtälöillä ja Ohmin lailla,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_q}{\epsilon_0}, \quad (3.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (3.8)$$

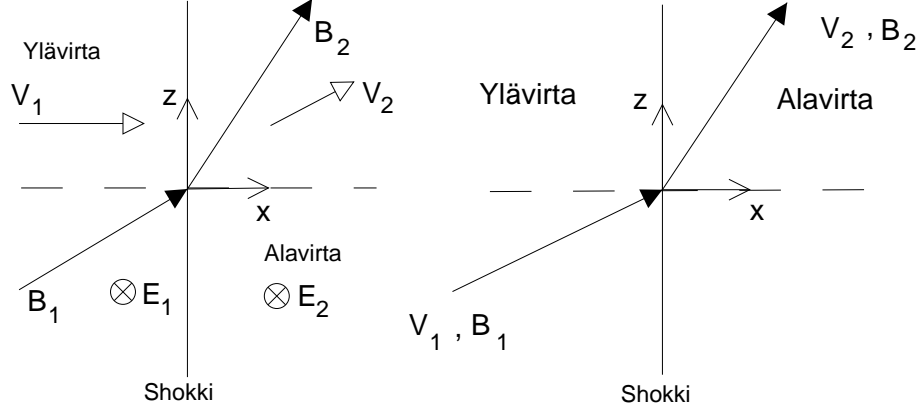
$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}). \quad (3.9)$$

MHD:n perusoletuksia on, että Amperen ja Maxwellin laissa (3.8) kentänmuutosvirta on pieni ja se jätetään pois (nk. Darwinin approksimaatio). Lisäksi ideaali-MHD:ssa plasman johtavuus oletetaan äärettömän suureksi, jolloin Ohmin laki (3.9) tulee muotoon $\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} = 0$. Kuljetusyhtälöiden ja Maxwellin yhtälöiden lisäksi tarvitaan paineelle jokin tilanyhtälö, jonka valinta riippuu tilanteen oletetusta fysiikasta.

3.1 Hyppyehtdot ja de Hoffmannin-Tellerin koordinaatisto

Shokkiaaltoja on yksinkertaisinta tarkastella sen omassa lepokoordinaatistossa. Asetetaan koordinaatisto siten, että shokki on xy-tasossa ja \mathbf{V} ja \mathbf{B} xz-tasossa (Kuva 3a). Lepokoordinaatistossa, jossa plasma virtaa x-akselin suuntaan, nimitetään *shokin peruskoordinaatistoksi*. Tilanteesta tulee tällöin ajasta riippumaton, mikä yksinkertaistaa MHD:n yhtälöitä jonkin verran. Yhtälöissä esiintyvät nopeudet on muunnettava shokin koordinaatistoon,

$\mathbf{V}' = \mathbf{V} - \mathbf{V}_{shokki}$. Plasman varaukset näkevät systeemin muuttuvan siirtyessään paikasta toiseen, joten kokonaisaikaderivaatta kirjoitetaan konvektiivisena $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V}' \cdot \nabla) = (\mathbf{V}' \cdot \nabla)$.



Kuva 3: (a) Vasemmalla plasman virtaus shokin peruskoordinaatistossa. Suuntaero plasman virtauksen ja magneettikentän välillä indusoi sähkökentän $\mathbf{E} = -\mathbf{V} \times \mathbf{B}$ sekä ylä- että alavirran puolelle. (b) Oikealla virtaus de Hoffmannin-Tellerin koordinaatistossa. Plasman nopeus ja magneettikenttä ovat yhdensuuntaiset shokin molemmiin puolin.

Yleisesti ottaen magneettikenttä ja plasman nopeus osoittavat eri suuntiin, jolloin systeemiin indusoituu sähkökenttä $\mathbf{E} = -\mathbf{V}' \times \mathbf{B}$. Sähkökenttä on kaikkialla tangentialinen shokin tasoon nähden ja siten se ei muutu ylävirrasta alavirtaan siirryttäessä. Samalla tämä tarkoittaa, että nopeus- ja magneettikentät sijaitsevat xz-tasossa myös alavirran puolella. MHD:n muiden suureiden muutokset epäjatkuvuuden yli voidaan laskea vastaavaan tapaan kuin sähkö- ja magneettikentän rajapintaehdot elektrodynamiikassa, eli integroimalla yhtälöt (3.1) - (3.4) shokin tason yli.

3.1.1 Vinon shokin hyppyehtot

Mikäli magneettikentän kenttäviivan nopeus pitkin shokin tasoa ei ylitä valon nopeutta, voidaan MHD:n yhtälöitä yksinkertaistaa siirtymällä nopeudella

$$\mathbf{V}_{dht} = -V' \tan \psi_1 \mathbf{k} \quad (3.10)$$

liikkuvaan koordinaatistoon, jossa plasman virtaus ja magneettikenttä ovat samansuuntaiset ja sähkökenttä häviää (Kuva 3b) [15]. $\psi_{1(2)}$ on kulma shokin normaalin ja ylävirran (alavirran) magneettikentän välillä. Tätä koordinaatistoa kutsutaan *de Hoffmannin-Tellerin koordinaatistoksi* (DHT).

Tietyn oletuksen on liikemäärä- ja energiayhtälöitä mahdollista yksinkertaistaa edelleen. Sijoittamalla liikemääräyhtälössä (3.2) $\mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}$ termiin

$\mathbf{J} \times \mathbf{B}$, kirjoittamalla ristitulot auki ja käyttämällä kokonaisaikaderivaattaa saadaan ¹

$$\nabla \cdot (\rho_m \mathbf{V}\mathbf{V} + (p + \frac{B^2}{2\mu_0})\mathcal{I} - \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}\mathbf{B}) = 0, \quad (3.11)$$

missä \mathcal{I} on yksikkötensori. Shokin paksuus on tyypillisesti plasman ionien gyrosäteen suuruusluokkaa. Hiukkasten liikkeessa satojen kilometrien sekuntivauhdilla shokin ylitys voidaan approksimoida tapahtuvan adiabaattisesti, koska hiukkasten väliset heikot vuorovaikutukset eivät ehdi tasapainottaa lämpötilaeroja tässä ajassa. Shokissa on kuitenkin hyvin turbulentti sähkömagneettinen kenttä, jonka välityksellä varaukset vuorovaikuttavat.

Energiayhtälössä (3.4) kaikki aikaderivaatat asetetaan nolllaksi, jolloin lämpövuoto on lähteetön. Sisäinen energia massayksikköä kohden voidaan kirjoittaa adiabaattivakion avulla

$$U = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho_m}, \quad (3.12)$$

missä $\gamma = \frac{5}{3}$ yksiatomiselle fluidille. Koska DHT:ssa $\mathbf{E} = 0$ ja $\mathbf{V} \parallel \mathbf{B}$, niin Ohmin lain mukaan $\mathbf{J} = 0$. Lisäksi saadaan aputuloks

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) = B^2 \mathbf{V} - \mathbf{B}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{B}) = 0. \quad (3.13)$$

Jättäen lisäksi sähkövirrantiheydestä riippuvat termit, energiankuljetusyhtälö yksinkertaistuu muotoon

$$\left(\frac{\gamma p}{(\gamma - 1)\rho_m} + \frac{1}{2}V^2 \right) \rho_m \mathbf{V} = 0. \quad (3.14)$$

Integroimalla tällä tavalla muokatut MHD:n yhtälöt shokin tason yli ja huomioimalla, että kaikki suureet muuttuvat vain x-suunnassa, saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{aligned} [B_x] &= 0, \\ [\rho_m V_x] &= 0, \\ \left[\rho_m V_x^2 + p + \frac{B_z^2}{2\mu_0} \right] &= 0, \\ \left[\rho_m V_x V_z - \frac{B_x B_z}{\mu_0} \right] &= 0, \\ \left[\left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) p V_x + \frac{1}{2} \rho_m V^2 V_x \right] &= 0, \end{aligned} \quad (3.15)$$

missä merkintä $[A] = A_2 - A_1 = 0$ tarkoittaa, että A :lla on sama arvo ylä- ja alavirran puolella epäjatkuvuutta.

¹Tästä eteenpäin jätän heittomerkit pois. Kaikkilla suureilla tarkoitetaan DHT-koordinaatistossa mitattuja arvoja.

Yhtälöt (3.15) voidaan ratkaista ilmaisemalla suureet alavirran puolella kaukaa ylävirrasta mitattujen arvojen avulla. Ratkaisuja on kolme: nopea ja hidas shokki sekä rotationaalinen epäjatkuvuus – tässä ollaan kiinnostuneita vain nopean shokin tapauksesta [11]. Merkitään puristussuhdetta eli tiheyden hyppyä X :llä, jolloin jatkuvuusyhtälöstä saadaan

$$\frac{\rho_{m2}}{\rho_{m1}} = X, \quad (3.16)$$

$$\frac{V_{2x}}{V_{1x}} = \frac{1}{X}. \quad (3.17)$$

Alaindekseillä 1 ja 2 tarkoitetaan arvoja ylä- ja alavirrassa.

Pitkähkön laskun jälkeen saadaan virtauksen normaali- ja tangentialikomponenttien muutoksiksi

$$\frac{B_{z2}}{B_{z1}} = \frac{V_1^2 - V_{A1}^2}{V_1^2 - XV_{A1}^2} X \quad (3.18)$$

$$\frac{V_{z2}}{V_{z1}} = \frac{V_1^2 - V_{A1}^2}{V_1^2 - XV_{A1}^2} \quad (3.19)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = X \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2c_{s1}^2} V_1^2 \left(1 - \frac{V_2^2}{V_1^2} \right) \right] \quad (3.20)$$

Yhtälöissä esiintyvät $c_{s1} = \sqrt{\rho_{m1}/\gamma p_1}$ ja $V_{A1} = B_1/\sqrt{\mu_0 \rho_{m1}}$ ovat äänen ja Alfvénin nopeudet ylävirran plasmassa. Yhtälöitä (3.16) - (3.20) kutsutaan *vinon shokin hyppyehdoksi*. Puristussuhde X saadaan positiivisena juurena yhtälöstä [11]

$$(V_1^2 - XV_{A1}^2)^2 \left[Xc_{s1}^2 + \frac{1}{2} V_1^2 \cos^2 \psi_1 \{X(\gamma - 1) - (\gamma + 1)\} \right] + \frac{1}{2} V_{A1}^2 V_1^2 \sin^2 \psi_1 X \left[\{\gamma + X(2 - \gamma)\} V_1^2 - XV_{A1}^2 \{(\gamma + 1) - X(\gamma - 1)\} \right] = 0.$$

3.1.2 Poikittaisen shokin hyppyehdot

Mikäli magneettikentän kenttäviivan ja shokin leikkauspisteen nopeus ylittää valon nopeuden, ei muunnosta DHT-koordinaatistoon voi tehdä. Voidaan kuitenkin siirtyä nopeudella

$$\mathbf{V}_p = -\frac{c^2}{V_1 \tan \psi_1} \mathbf{k} \quad (3.21)$$

liikkuvaan koordinaatistoon, jossa kenttäviivan nopeus menee äärettömän suureksi ja shokki muuntuu poikittaiseksi ($\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ ja $\mathbf{V} = V\mathbf{e}_x$) [15].

MHD:n yhtälöt tulevat nyt muotoon

$$\begin{aligned} [\rho_m V] &= 0, \\ \left[\rho_m V^2 + p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right] &= 0, \\ \left[\frac{\gamma}{\gamma-1} p V + \frac{B^2}{\mu_0} V + \frac{1}{2} \rho_m V^3 \right] &= 0, \\ [BV] &= 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Jatkuvuusyhtälöstä saadaan samat hypyt nopeudelle ja tiheydelle kuin edellä. Magneettikentän hyppy seuraa suoraan Ohmin laista ja sähkökentän tangentiaalikomponentin säilymisestä, joten

$$\frac{\rho_{m2}}{\rho_{m1}} = X, \quad (3.23)$$

$$\frac{V_{2x}}{V_{1x}} = \frac{1}{X}, \quad (3.24)$$

$$\frac{E_{2y}}{E_{1y}} = 1, \quad (3.25)$$

$$\frac{B_{2z}}{B_{1z}} = X. \quad (3.26)$$

Liikemäärän- ja energiankuljetusyhtälöistä voidaan ratkaista paineen hyppy

$$\frac{p_2}{p_1} = \gamma M_1^2 \left(1 - \frac{1}{X}\right) - \frac{1 - X^2}{\beta_1}, \quad (3.27)$$

missä $M_1 = V_1/c_{s1}$ on ylävirran virtauksen Machin luku ja $\beta_1 = 2\mu_0 p_1/B_1^2$ on ylävirran hiukkaspaineen ja magneettisen paineen suhde, plasman beta. Puristussuhde saadaan yhtälön

$$2(2 - \gamma)X^2 + [2\beta_1 + (\gamma - 1)\beta_1 M_1^2 + 2] \gamma X - \gamma(\gamma + 1)\beta_1 M_1^2 = 0 \quad (3.28)$$

positiivisena ratkaisuna [11].

3.2 Analyttinen ratkaisu magneettikentälle shokin takana

Tietyin oletuksin on magneettikenttä shokin takana mahdollista ratkaista analyttisesti. Olettamalla kenttäviivojen diffuusio merkityksettömäksi on induktioyhtälö

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}), \quad (3.29)$$

josta saadaan kentän aikakehitys shokin takana. Jos ylävirran plasman oletetaan virtaavan kaikkialla vakionopeudella shokin normaalin suuntaisesti,

saadaan $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ avulla yhtälöryhmä

$$\begin{aligned}\partial_t B_x + V_{2x} \partial_x B_x &= 0, \\ \partial_t B_y + V_{2x} \partial_x B_y &= 0, \\ \partial_t B_z + V_{2x} \partial_x B_z &= 0.\end{aligned}$$

Ratkaisu on, olettaen shokin sijaitsevan paikassa $x = 0$,

$$\mathbf{B}(x, y, z, t) = \mathbf{B}(x = 0+, y, z, t'), \quad (3.30)$$

missä $x = 0+$ tarkoittaa komponenttien arvoja heti shokin takana ja

$$\begin{aligned}t' &= t - x/V_{2x} \\ V_{2x} &= V_{1x}/X, \\ B_x(x = 0+, y, z, t') &= B_x(x = 0-, y, z, t'), \\ B_y(x = 0+, y, z, t') &= X B_y(x = 0-, y, z, t'), \\ B_z(x = 0+, y, z, t') &= X B_z(x = 0-, y, z, t').\end{aligned}$$

Merkinnällä $x = 0-$ taas tarkoitetaan kentän arvoja ylävirran puolella. Plasman virtaus siis kuljettaa magneettikenttää mukanaan alavirran virtausnopeudella V_{2x} . Kenttä määräytyy ylävirran kentästä ja puristussuhteesta siten, että se taivutuu kohti shokin tasoa. Tehdyt oletukset virtauksesta viittaavat tilanteisiin, joissa ylävirran plasma virtaa paljon Alfvénin nopeutta suuremmalla nopeudella, $V_{1x} \gg V_A$.

Saatu ratkaisu on varsin käyttökelpoinen numeerisissa testihiukkassimulaatioissa, koska kenttää shokin takana ei tarvitse simuloida erikseen esimerkiksi *finite difference* -menetelmällä. Interpoloinnit hilapisteistä varauksen todelliseen sijaintiin saattavat muuttaa kentän lähteettömyyttä ja aiheuttaa epäfysikaalisia efektejä. Approksimaatio virtauksen suunnasta tuskin vastaa todellisuutta, mutta parannukset tähän vaatisivat nopeuskenttää esimerkiksi MHD-simulaatiosta, jota ei ollut saatavilla.

Kuvia kentästä shokin takana testihiukkassimulaation geometrioissa on liitteessä B (s. 64).

4 Shokkikiihdytys

Shokkiaalloilla on jo pitkään tiedetty olevan kyky kiihdyttää hiukkasia suuriin energioihin. Yleisesti ottaen shokkiaalto muuttaa muotoaan edetessään plasmassa ja epälineaariset prosessit tuottavat paljon turbulenssia shokin ympäristöön. Yleisen tapauksen analyyttinen käsittely, jossa shokin kiihdyttämien hiukkasten vaikutus shokin rakenteeseen huomioidaan, on varsin vaativaa. Jättäen toistaiseksi turbulenssin ja muut aalto-hiukkas-vuorovaikutukset huomioimatta voidaan tapauksissa, joissa shokkirintaman koko on suuri verrattuna tarkasteltavaan kiihdytysalueeseen, olettaa shokki paikallisesti tasomaiseksi ja tutkia kiihdytyksen yksityiskohtia edellisen luvun geometriassa ja koordinaatistoissa. Tehdään lisäksi oletus, että vain pieni osa plasman hiukkasista kiihtyy korkeisiin energioihin. Tällöin niiden vaikutusta koko systeemin dynamiikkaan voidaan pitää mitättömänä. Näillä oletuksilla kiihdytettäviin ”testihiukkasiin” vaikuttaa vain shokin sähkö- ja magneettikentät, jotka syntyvät taustan plasman virtauksesta ja testihiukkasten liikettä voidaan kuvata johtokeskusapproksimaatiolla.

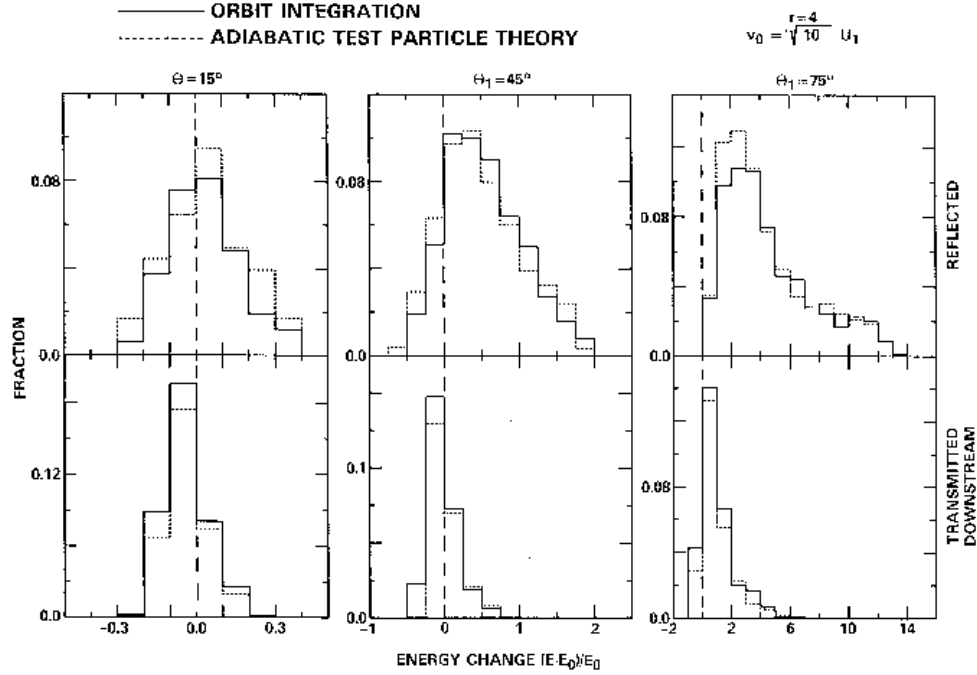
Energia (keV)	Nopeus (km/s)	Gyrosäde (m)	t_{gyro} aikana kuljettu matka (m)
1	440	16	102
10	1380	51	320
100	4380	162	1020
1000	13840	510	3200

Taulukko 2: Protonin gyrosäteiden arvoja eri energioilla 2 G magneettikentässä. Viimeisessä sarakkeessa gyrokierroksen $t_{gyro} = 2\pi/\omega_{gyro}$ aikana kuljettu matka magneettikentän suuntaan. Nousukulmana on käytetty $\alpha = 45^\circ$.

Shokkirintaman paksuus oli taustan plasman gyrosäteen suuruusluokkaa. Korkeaenergiaisten hiukkasen törmätessä shokkiin sen näkemä magneettikenttä muuttuu hyvin jyrkästi, joten ei ole selvää että johtokeskusapproksimaatio antaisi hyviä tuloksia – kenttien muutoksethan oletettiin lineaarisiksi gyrosäteen matkalla. Kentän muutos on pikemminkin oletettava äkilliseksi, kuten taulukosta 2 voi päätellä. Johtokeskusapproksimaatio on kuitenkin osoittautunut yllättävänkin toimivaksi lukuissa numeerisissa simulaatioissa, joissa on laskettu hiukkasten ratoja Lorentzin voimasta shokin lähistöllä. Decker on tehnyt aiheesta varsin kattavan tutkimuksen [5], (kuva 4).

Testihiukkasten energiamuutokset voidaan laskea analyyttisesti tasomaiselle shokille, jossa magneettikenttä on homogeeninen ylä- ja alavirrassa, mutta muuttuu epäjatkuvasti shokkirintamassa $x = 0$ (esitys seuraa Webbiä [15]). Korkeaenergiaisten hiukkasen johtokeskuksen nopeus on

$$\mathbf{V}_{jk} = v_{||} \mathbf{e}_B + \mathbf{V}_{E \times B} + \mathbf{V}_{\nabla B} + \mathbf{V}_K \quad (4.1)$$



Kuva 4: Shokista heijastuneiden ja sen läpäisseiden hiukkasten suhteelliset energiamuutokset, pystyakselilla suhteellinen hiukkasmäärä. Numeerisen raitaintegroinnin ja johtokeskusapproksimaation tulokset käyvät hyvin yhteen. Kulma θ on shokin normaalin ja ylävirran magneettikentän välinen kulma. Shokin puristussuhde $r = 4$ ja shokkiin injektoitujen hiukkasten alkunopeus $v_0 = \sqrt{10}U_1$, missä U_1 on ylävirran plasman virtausnopeus shokin koordinaatistossa. [5]

Hiukkasen kineettistä energiaa muuttaa sähkökentän $\mathbf{E} = -\mathbf{V} \times \mathbf{B}$ tai magneettikentän ajallisten muutoksien indusoiman sähkökentän (betatronikiihdytys) tekemä työ. Käyttäen työn määritelmää ja huomioiden, että shokin lepokoordinaatistossa kentät eivät riipu ajasta, energian muutos on

$$\frac{d}{dt}W = q\mathbf{V}_{jk} \cdot \mathbf{E} + \mu \frac{\partial B}{\partial t} = q(\mathbf{V}_{\nabla B} + \mathbf{V}_K) \cdot \mathbf{E} \quad (4.2)$$

Johtokeskuksen eri nopeuksista vain gradientti- ja kiihtyvyysskulkeutumiset ovat sähkökentän suuntaisia. Magneettikentässä tapahtuu muutoksia vain itse shokkirintamassa, jossa se nopean shokin tapauksessa taittuu normaalista poispäin ja sen voimakkuus kasvaa. Vastaavasti kaikkien muidenkin suureiden muutokset riippuvat vain kohtisuorasta etäisyydestä shokkirintamaan. Energian muutos voidaan lausua shokin parametrien avulla sijoittamalla kulkeutumisenopeudet (2.23) yhtälöön (4.2).

Näin saatavissa yhtälöissä esiintyy magneettinen momentti ja hiukkasen nousukulma. Nämä ovat sikäli ongelmallisia suureita, että koordinaatistoissa joissa

johtokeskus liikkuu magneettikenttään nähden poikittaiseen suuntaan, riippuu niiden suuruus gyroliikkeen vaihekulmasta. Ongelma ratkeaa laskemalla tällaisten suureiden arvot koordinaatistossa, jossa kulkeutumisesta häviävät tai käsittämällä kaikki arvot gyroliikkeen yli keskiarvoistetuiksi (sama asia).

4.1 Subluminaaliset shokit

Subluminaalisilla shokeilla johtokeskuksen liikettä voidaan tarkastella DHT-koordinaatistossa. Sähkökentän puuttuminen tarkoittaa, että energia pysyy vakiona ja varaus joko peilautuu shokista tai kulkee sen läpi, jolloin nousukulma kasvaa yhtälön (2.33) mukaisesti. Shokin muissa lepokoordinaatistoissa (esimerkiksi peruskoordinaatistossa) hiukkasen energia muuttuu, koska se liikkuu sähkökentän $\mathbf{E} = -\mathbf{V} \times \mathbf{B}$ suuntaan.

Tarkastellaan energian muutosta pelkästään shokin lepokoordinaatistossa. Tällöin magneettinen momentti ja nousukulma eivät ole vakioita, mutta niiden arvot voidaan ilmoittaa DHT-koordinaatiston arvojen avulla. Tarkasti ottaen DHT-koordinaatistossa nousukulman arvo on pienempi, koska kentän suuntainen nopeus on suurempi. Fysikaalisesti merkittävä seikka on kuitenkin sähkökentän suuntaan liikuttu matka s . Hiukkasen liikkua nopeammin vuorovaikutus shokin kanssa tapahtuu lyhyemmässä ajassa, joten ainakin intuitiivisesti on selvää että s on sama näissä koordinaatistoissa.

Subluminaalisille shokeille on hyödyllistä käyttää DHT-koordinaatistossa mitattuja arvoja, jolloin magneettinen momentti on

$$\mu = \frac{p'v'\sin^2\alpha'}{2B}, \quad (4.3)$$

missä kineettinen energia on kirjoitettu liikemäärän avulla. Energian muutokseksi saadaan, huomioiden että kaarevuuskulkeutuminen on merkittävin tekijä kiihtyvyysskulkeutumisista korkeaenergisille hiukkasille ($v_{||} \gg V_E$),

$$\frac{dW}{dt} = \mathbf{B} \times \left[\frac{p'v'\sin^2\alpha'}{2B} \nabla B + \frac{p'v'\cos^2\alpha'}{B^2} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} \right] \cdot \frac{\mathbf{E}}{B^2}. \quad (4.4)$$

Yhtälöä (4.4) voidaan yksinkertaistaa huomioimalla, että B_x on vakio ja että kaikki muutokset riippuvat vain x -koordinaatista. Tällöin kokonaisaikaderivaatta voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{d}{dt} = V_{jk,x} \frac{d}{dx} = v'_{||} \cos \psi \frac{d}{dx} = v' \cos \alpha' \frac{B_x}{B} \frac{d}{dx}. \quad (4.5)$$

Samoin pätee

$$\frac{dB}{dx} = \frac{B_z}{B} \frac{dB_z}{dz}. \quad (4.6)$$

Käyttäen näitä muotoja derivaatoille saadaan energian muutokseksi

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dt} &= \frac{E_y}{B^2} \left[\frac{p'v' \sin^2 \alpha'}{2B} B_z \frac{dB}{dx} - \frac{p'v' \cos^2 \alpha'}{B^2} B_x^2 \frac{B}{B_z} \frac{dB}{dx} \right] \\ &= \frac{p'v' E_y}{B^3 B_z} \left[B_z^2 \frac{\sin^2 \alpha'}{2} - B_x^2 \cos^2 \alpha' \right] \frac{dB}{dx}.\end{aligned}\quad (4.7)$$

Nopealle shokille $\frac{dB}{dx}$ on positiivinen. Tuloksesta seuraa, että gradienttikulkeutuminen kasvattaa hiukkasten energiaa ja että pienillä nousukulmilla voi tapahtua energiahäviötä. Käytännössä energiahäviöiden merkitys on pieni. Yhtälö (4.7) on yhtäpitävä yhtälön

$$\frac{dW}{dt} = -p'V_1 \tan \psi_1 \frac{d}{dt} [\cos \alpha' \sin \psi] \quad (4.8)$$

kanssa, missä $V_1 = \frac{E_y}{B_z}$ on ylävirran plasman nopeus. Tuloksen osoittaminen lähtien yhtälöstä (4.7) on varsin hankalaa kaukonäköisemmällekin. Toiseen suuntaan laskua helpottavat aputulokset

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \cos \alpha' &= \frac{-1}{2 \cos \alpha'} \frac{d}{dx} \left[\frac{2\mu B}{p'v'} \right] \\ \frac{d}{dt} \sin \psi &= v' \cos \alpha' \frac{B_x^3}{B_z B^3} \frac{dB}{dx}\end{aligned}$$

Yhtälö (4.8) voidaan integroida, jolloin

$$\Delta W = -p'V_1 \tan \psi_1 \Delta(\cos \alpha' \sin \psi). \quad (4.9)$$

Energian muutos saatiin siis lausuttua nousukulman ja toisaalta magneettikentän komponenttien välisen kulman muutoksien avulla. Energian muutokselle on kolme eri tapausta, riippuen hiukkasen sijainnista ja kriittisen nousukulman arvosta (2.34):

1. Hiukkanen alunperin ylävirran puolella, liikkuu kohti shokkia ja siirtyy alavirran puolelle. Tällöin $\Delta(\cos \alpha' \sin \psi) = \cos \alpha'_2 \frac{B_{z2}}{B_2} - \cos \alpha'_1 \frac{B_{z1}}{B_1}$ ja nousukulma alavirrassa α'_2 saadaan yhtälöstä (2.33).
2. Hiukkanen alunperin ylävirran puolella, liikkuu kohti shokkia ja peilautuu takaisin shokista takaisin ylävirtaan, $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1$. Tässä tapauksessa $\Delta(\cos \alpha' \sin \psi) = -2 \cos \alpha'_1 \frac{B_{z1}}{B_1}$.
3. Hiukkanen alavirran puolella, liikkuu kohti shokkia ja siirtyy ylävirran puolelle. Hiukkasen nopeus alavirrassa kohti shokkia on oltava tarpeeksi suuri, $v_{||} > V_1 \tan \psi_1$. Koska magneettikentän voimakkuus on pienempi ylävirran puolella, hiukkanen ei voi peilautua. $\Delta(\cos \alpha' \sin \psi) = \cos \alpha'_1 \frac{B_{z1}}{B_1} - \cos \alpha'_2 \frac{B_{z2}}{B_2}$ ja nousukulma ylävirrassa saadaan taas yhtälöstä (2.33).

Muissa tapauksissa hiukkanen ei kohtaa shokkirintamaa.

4.2 Superluminaaliset shokit

Superluminaalisten shokkien tapauksessa muunnosta DHT-koordinaatistoon ei voi tehdä. Tällöin voidaan kuitenkin siirtyä nopeudella $\mathbf{V} = -\frac{c^2}{V_1 \tan \psi_1} \mathbf{z}'$ liikkuvaan koordinaatistoon, jossa shokki muuntuu poikittaiseksi. Magneettikentän suuntainen liikeyhtälö on

$$ma_{||} = qE_{||} - \mu(\nabla B)_{||} + \frac{\mathbf{V}_E}{B} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} = 0, \quad (4.10)$$

joten pitkittäinen energia ei muutu (vain B_z muuttuu x-akselin suuntaan). Tämä oli tietysti mielessä odotettavissakin, sillä hiukkasen liikkuaessa magneettikentän voimakkuus kasvaa, mutta sen suunta ei muutu. Tässä on siis kyseessä eräänlainen betatronikiihdytys. Shokki kasvattaa vain poikittaista energiaa, jonka muutos on

$$\frac{dW}{dt} = q(\mathbf{V}_{\nabla B} + \mathbf{V}_K) \cdot \mathbf{E}. \quad (4.11)$$

Kulkeutumisnopeuksista jää jäljelle vain termit

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{\nabla B} &= \frac{\mu}{qB} \frac{dB}{dx} \mathbf{e}_y \\ \mathbf{V}_K &= \frac{m}{qB} V_E \frac{dV_E}{dx} \mathbf{e}_y. \end{aligned}$$

Lisäksi energian aikaderivaatta voidaan muuttaa paikkaderivaataksi yhtälön (4.5) avulla (nyt $V_{jk,x} = V_E$), jolloin

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dx} &= \mu \frac{dB}{dx} + mV_E \frac{dV_E}{dx} \\ \Rightarrow \Delta W &= \mu \Delta B + \Delta \left(\frac{1}{2} m V_E^2 \right) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Poikittaisen shokinkin tapauksessa gradienttikulkeutuminen kasvattaa hiukkasen energiaa, tällä kertaa polarisaatiokulkeutuminen pienentää sitä, koska sähköinen kulkeutumisnopeus on pienempi alavirran puolella. Suhteellinen energian muutos saadaan havainnolliseen muotoon käyttämällä poikittaisen shokin hyppyehtoja (3.26),

$$\frac{\Delta W}{W_1} = (X - 1) \sin^2 \alpha_1 - \left(\frac{V_{E1}}{v_1} \right)^2 \left(\frac{X^2 - 1}{X^2} \right). \quad (4.13)$$

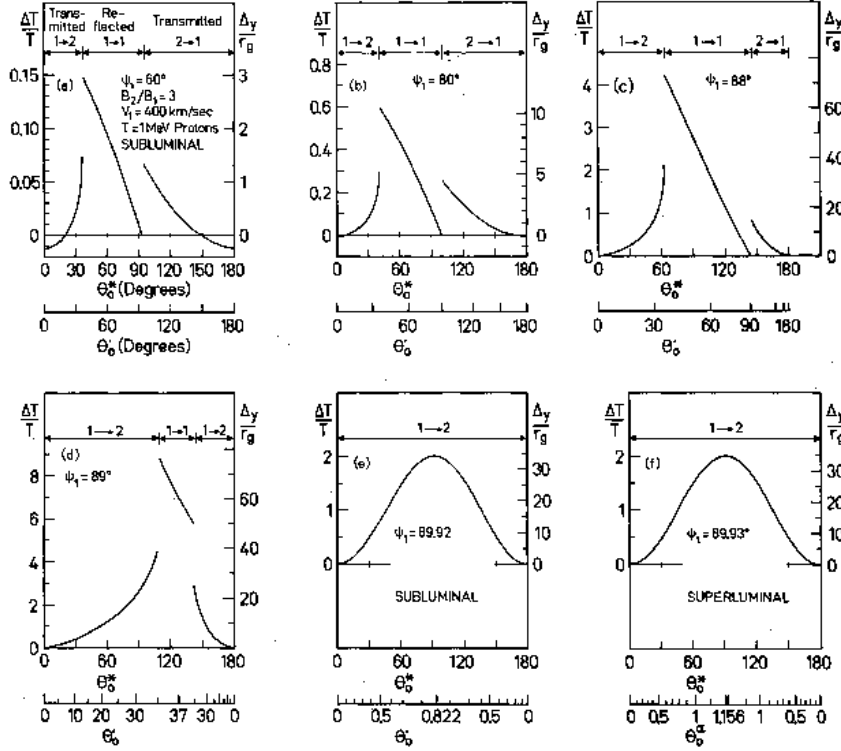
Oikean puolen termit ovat yhtä suuria nousukulmalla

$$\alpha \approx \frac{V_{E1}}{v_1 X} \sqrt{X + 1}. \quad (4.14)$$

Mikäli hiukkasen alkuperäinen nopeus ylävirrassa on paljon taustan plasman virtausnopeutta suurempi, on energiahäviö suurimmalle osalle hiukkasista käytännössä merkityksetön. Esimerkiksi 100 keV protonille nopeudella 600 km/h liikkuvassa shokissa ($X = 4$) ovat yhtälön (4.13) oikean puolen termit yhtä suuria nousukulmalla $\alpha \approx 4.4^\circ$. Energiamuutokset eri nousukulmilla ja shokin kaltevuuksilla johtokeskusapproksimaatiosta laskettuna kuvassa 5.

2, 1983

DRIFT MECHANISM



Kuva 5: Suhteellinen energian muutos 1 MeV protoneille shokeissa alkupe-
räisen nousukulman funktiona. θ^* tarkoittaa nousukulmaa nopeudella $V_{E \times B}$
liikkuvassa koordinaatistossa, jossa se ei riipu gyroliikkeen vaihekulmasta.
Kaikissa kuvissa shokin nopeus on 400 km/s, ala- ja ylävirran magneetti-
kenttien suhde $B_2/B_1 = 3$ ja ψ_1 on ylävirran kentän ja shokin normaalin
välinen kulma. Kuvien yläosissa merkinnät tarkoittavat hiukkasen alku- ja
loppusijaintia (1 = ylävirta, 2 = alavirta). Esimerkiksi 1 \rightarrow 1 tarkoittaa, että
hiukkanen liikkui shokkiin ylävirran puolelta ja heijastui takaisin ylävirtaan
[15].

5 Diffusiivinen shokkikiihdytys

Edellisessä luvussa esitelty johtokeskuksen kulkeutumiseen shokin sähköken-
tässä perustuva kiihdytysmekanismi kykenee parhaimmillaankin “vain” noin
kymmenkertaistamaan varauksen energian. Shokin kohtaamisen jälkeen va-
raukset joko heijastumisen jälkeen joko karkaavat ylävirtaan tai huuhtoutu-
vat alavirtaan. Korkeaenergiaisten ($E \geq 10$ MeV) hiukkasten tuottamiseen
tarvitaan jokin mekanismi, joka saa varauksen kohtaamaan shokin useita ker-
toja. Yksikään todellinen magneettikenttä ei ole kaikkialla homogeeninen, jo-
ten esimerkiksi supistuvaa magneettikenttää kohti etenevä shokki voi vangit-
ta osan hiukkasista poukkoilemaan toisiaan lähestyvien peilipisteiden väliin.

Tällainen esimerkki on erittäin riippuvainen tilanteen geometriasta eikä siten tarjoa yleispätevää selitystä havaituille kosmisten säteiden energiajakaumille, jotka tyypillisesti ovat muotoa E^{-s} , missä s on lähellä ykköstä oleva vakio [11].

Shokki ja alavirran alue sen takana ovat hyvin turbulenteja, joten on mahdollista että korkeaenergiainen hiukkanen siroaa näiden alueiden aalloista. Tehokkaimmin hiukkasta sirottavat aallot, joiden aallonpituus on hiukkasen gyrosäteen suuruusluokkaa, joten kyseeseen tulevat tässä lähinnä matalan taaajuuden MHD-aallot. Voidaan lisäksi osoittaa, että yliaalfvenisella nopeudella etenevä hiukkanen synnyttää itse tällaisia aaltoja, jotka etenevät hiukkasen kanssa samaan suuntaan magnetosonisella nopeudella [11]. Myöhemmin, esimerkiksi shokista heijastumisen jälkeen, hiukkanen kohtaa ylävirran puolella näitä itse aiheuttamia aaltoja ja siroaa. Pitkän aallonpituuden rajalla energianvaihto aallon kanssa on hyvin pientä, mutta liikemäärän muutos havaittavaa. Tämä johtaa *nousukulmasirontaan*, jossa hiukkasen nousukulma muuttuu jokaisessa sironnassa vähäsen, mutta energia ei muutu sirontakeskuksen lepokoordinaatistossa. Tarpeeksi monen sironnan jälkeen kentänsuuntainen nopeus on voinut muuttua niin paljon, että hiukkanen kohtaa shokin uudelleen.

Tätä prosessia voidaan kuvata sirontakeskuksilla, jotka liikkuvat taustan plasman nopeudella. Varaukset satunnaisesti siroavat ylä- ja alavirran lepokoordinaatistossa elastisesti, vaihtavat etenemissuuntaansa ja ylittävät shokin useaan kertaan. Tällaista sirontaa voidaan kuvata Vlasovin yhtälössä diffuusiolla liikemäärässä. Kineettisen plasmateorian kanssa päästään samaan tulokseen tarkastelemalla yhden hiukkasen satunnaista liikettä, jolloin saadaan näkyvämmiin esiin lopputulokseen vaikuttavat tekijät.

Lienee yksinkertaisinta tarkastella magneettikentän suuntaan etenevää shokia yhdessä ulottuvuudessa. Ylävirran plasma virtaa nopeudella U_1 ja alavirran nopeudella $U_2 = U_1/X$ eikä shokissa ole sähkökenttää. Koska magneettikentän normaalikomponentti on jatkuva, se ei muutu shokin yli eikä siis vaikuta varausten liikkeeseen. Oletetaan, että sironta on niin voimakasta että se kykenee pitämään korkeaenergiasten hiukkasten jakauman isotrooppisena nousukulman suhteen sekä ylä- että alavirran puolella. Nämä varaukset saavat energiaa ylittäessään shokin, ja haluamme tietää millainen on energiajakauma mitattuna kaukana alavirran puolella.

Sironnasta johtuen emme voi tietää, millä nousukulmalla yksittäinen hiukkanen kohtaa shokin. Mikäli korkeaenergiasten hiukkasten lukumäärä on suuri, voidaan approksimoida, että jokainen hiukkanen saa matkalla ylävirrasta alavirtaan ja takaisin aina samansuuruisen (keskiarvoisen) lisäyksen liikemäärään. Laskun lopputulos siis pätee vain statistisessa mielessä. Yksittäisen hiukkasen energiaa kaukana alavirrassa mitattuna ei voida ennustaa. Laskeetaan seuraavaksi, mikä on tämä keskimääräinen lisäys liikemäärässä (esitys

seurailee Drurya [6] ja Belliä [2]).

Tarkastellaan yhden kenttäviivan ympärillä pyörivää hiukkaspopulaatiota (lukumäärätiheys n_0), jolla on alunperin nopeus v_0 ylävirrassa. Kaikki aikayksikköä kohden alavirtaan siirtyvät hiukkaset sijaitsevat ρ -säteisen (ρ gyrosäde) ja $v_0\Delta t$ -pituisen sylinterin sisällä. Hiukkasten lukumäärä tässä sylinterissä on

$$N = \pi \rho^2 v_0 \Delta t n_0. \quad (5.1)$$

Hiukkanen siirtyy alavirtaan vain, jos sen kentänsuuntainen nopeus $v_{||} = v_0 \cos \alpha > U_1$. Isotrooppisessa jakaumassa puolet hiukkasista liikkuu vasemmalle (eivät kohta shokkia) ja puolet oikealle. Tietystä etäisyydestä alavirtaan siirtyvien hiukkasten lukumäärä voidaan kirjoittaa nousukulman avulla (tehdään sijoitus $w = \cos \alpha$),

$$n(w) = \frac{n_0}{2} w. \quad (5.2)$$

Alavirtaan siirtyy

$$N_{1 \rightarrow 2} = \int n(w) dV = \frac{n_0}{2} \pi \rho^2 v_0 \Delta t \int_0^1 w dw = \frac{N}{4} \quad (5.3)$$

hiukkasta. Tarkasti ottaen myös pieni osa vasemmalle liikkuvista hiukkasista ($\alpha > \pi/2$) siirtyy shokkiin. Korkeaenergisille hiukkasille $v_0 \gg U_1$, joten virhe tämän huomiotta jättämisessä on pieni.

Lasketaan seuraavaksi alavirtaan siirtyvä liikemäärä. Shokin koordinaatistossa ylävirran hiukkasen liikemäärä on

$$p_{shokki} = m \sqrt{(v_0 \cos \alpha + U_1)^2 + v_{\perp}^2} \approx p_0 \left(1 + \frac{w}{v_0} U_1 \right), \quad (5.4)$$

missä nopeus on kirjoitettu Taylorin sarjaksi U_1/v_0 suhteen. Vastaavalla tavalla saadaan liikemäärä alavirran koordinaatistossa,

$$p_{alav.} \approx p_0 \left(1 + \frac{(U_1 - U_2)w}{v_0} \right) \Rightarrow \Delta p = \frac{p_0}{v_0} (U_1 - U_2) w, \quad (5.5)$$

Keskimääräinen liikemäärän muutos alavirtaan siirtyvälle hiukkaselle on

$$\langle \Delta p \rangle = \frac{1}{N/4} \int \Delta p(w) n(w) dV = \frac{2}{3} \frac{p_0}{v_0} (U_1 - U_2). \quad (5.6)$$

Alavirran puolella hiukkaset siroavat elastisesti ja voivat siirtyä takaisin ylävirtaan. Keskimääräinen liikemäärän muutos alavirrasta ylävirtaan on edelleen (5.6). U_1 ja U_2 vaihtuvat päittäin, mutta ylävirtaan siirtyvien hiukkasten

nousukulma on välillä $[\pi/2, \pi]$ joten integraalin tulos on sama. Liikemäärä k :n edestakaisen matkan jälkeen,

$$p_k = \prod_{i=1}^k \left(1 + \frac{4}{3} \frac{U_1 - U_2}{v_i} \right) p_0. \quad (5.7)$$

$$\Rightarrow \ln \left(\frac{p_k}{p_0} \right) = \frac{4}{3} (U_1 - U_2) \sum_{i=1}^k \frac{1}{v_i}. \quad (5.8)$$

Jotta saadaan haluttu lopputulos, täytyy tietää millä todennäköisyydellä yksittäinen varaus tekee k edestakaista matkaa shokin yli. Sironnaprosessia voidaan kuvata kuvata diffuusioyhtälöllä [2], erityisesti alavirran puolella

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} + U_2 \frac{\partial n(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(x) \frac{\partial n(x, t)}{\partial x} \right), \quad (5.9)$$

missä $D(x)$ on diffuusiovakio ja vasemman puolen toinen termi ilmaisee sen, että taustan plasman nopeudella liikkuvat sironakeskukset pyrkivät kuljettamaan varauksia mukanaan. Tilanne voidaan tehdä ajasta riippumattomaksi injektioimalla shokkiin varauksia samaan tahtiin kuin niitä konvektoituu pois. Tällöin yhtälön (5.9) muodollinen ratkaisu on

$$n(x) = A \exp \left(\int_0^x \frac{U_2}{D(x')} dx' \right) + B, \quad (5.10)$$

missä A ja B ovat integroimisvakioita. Kaukana alavirran puolella eksponenttitermi kasvaa rajatta, ellei diffuusiovakio kasva riittävän nopeasti. Diffusion (sironnan) vapaa matka on kuitenkin verrannollinen hiukkasen gyrosäteeseen, joten fysikaaliselle ratkaisulle täytyy valita $A = 0$. Hiukkasvuo kaukana alavirrassa on siis vakio,

$$J_{2 \rightarrow \infty} = n(x = 0+) U_2. \quad (5.11)$$

Toisaalta aiemmasta laskusta (5.3) ² tiedämme, että hiukkasvuo ylävirrasta alavirtaan on

$$J_{1 \rightarrow 2} = \frac{nv}{4}. \quad (5.12)$$

Todennäköisyys, ettei hiukkanen enää kohtaa shokkia, täytyy olla näiden kahden hiukkasvuon suhde,

$$P_{2 \rightarrow \infty} = \frac{4U_2}{v}. \quad (5.13)$$

²Jaetaan alavirtaan siirtyvien hiukkasten lukumäärä sylinterin kannen pinta-alalla ja yksikköajalla.

Koska hiukkasten nopeus oletettiin paljon plasman nopeutta suuremmaksi ja jakauma isotrooppiseksi, suurin osa hiukkasista ylittää shokin useaan otteeseen. Varaus tekee k edestakaista matkaa todennäköisyydellä

$$P_k = \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{4U_2}{v_i}\right). \quad (5.14)$$

$$\Rightarrow \ln P_k = -4U_2 \sum_{i=1}^k \frac{1}{v_i}. \quad (5.15)$$

Yhtälön (5.8) avulla todennäköisyys tulee muotoon

$$P_k = \left(\frac{p_k}{p_0}\right)^{-3U_2/(U_1-U_2)}. \quad (5.16)$$

Alavirtaan karkaavien hiukkasten differentiaalin liikemääräspektri ylävirran lukumäärätiheyden n_0 ja shokin puristussuhteen (3.17) avulla lausuttuna on

$$f(p) = -n_0 \frac{U_1}{U_2} \frac{dP_k}{dp} = \frac{n_0}{p_0} \frac{3X}{X-1} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{-(X+2)/(X-1)} \sim p^{-\sigma}, \quad (5.17)$$

missä suhde U_1/U_2 ilmaisee seikan, että alavirrassa sirontakeskuksia on tiheämmässä johtuen niiden alhaisemmasta etenemisnopeudesta. Tuloksena liikemääräspektrille saatiin siis yksinkertainen potenssilaki, jonka spektriindeksi σ riippuu pelkästään shokin puristussuhteesta. Vahvoille shokeille $X = 4$, jolloin $\sigma = 2$. Differentiaalinen energiaspektri

$$\frac{dN}{dE} \sim \left(\frac{E}{E_0}\right)^{-\sigma/2}. \quad (5.18)$$

5.1 Yleistys vinoihin shokkeihin

Aiemmassa laskussa oletettiin shokin liikkuvan magneettikentän suuntaan, jolloin kenttä ei muutu shokin yli eikä vaikuta hiukkasten liikkeeseen. Todellisuudessa tällainen oletus shokin liikkeestä ei ole järkevä. Kysymys kuuluukin: miten magneettikentän taipuminen shokin yli vaikuttaa spektrin muotoon? Vastaus on varsin yksinkertainen – ei juuri mitenkään.

Tarkasteltaessa hiukkasten liikettä DHT-koordinaatistossa tilanne on hyvin samankaltainen edellä esitetyn kanssa. Sähkökentän häviäminen poistaa kulkeutumisenopeuksien aiheuttaman kiihdytyksen, shokki tosin liikkuu kenttäviivan suuntaan aiempaa suuremmalla nopeudella. Jossain vaiheessa nopeus kasvaa kuitenkin niin suureksi, ettei merkittävä osa hiukkasista voi enää saavuttaa shokkia siirryttyään alavirran puolelle ja oletus hiukkasjakauman isotrooppisuudesta pettää.

Mikroskooppisen käsittelyn kannalta liike muuttuu siten, että varauksilla on alavirtaan siirtymisen lisäksi tietty todennäköisyys peilautua takaisin ylävirtaan. Tämä todennäköisyys riippuu nousukulmasta ja shokin puristussuhteesta. Intuitiivisesti tällä ei pitäisi olla vaikutusta energiaspektrin muotoon, koska sironta alavirran puolella ja mahdollinen siirtyminen takaisin ylävirtaan on eräänlaista peilautumista – se ei vain tapahdu juuri shokkirintaman kohdalla. Edellisessä luvussa esitetty kulkeutumiskiihtyminen subluminaalisissa shokeissa johtikin energiamuutokseen, joka on verrannolliseen jo olemassaolevaan liikemäärään (4.9).

Vastaava käsittely varausten liikkeelle vinon shokin geometriassa [6] johtaa pieniin muutoksiin aiempiin tuloksiin. Hiukkasvuot ylävirrasta alavirtaan ja alavirrasta äärettömyyteen ovat

$$J'_{1 \rightarrow 2} = \frac{n}{4} v \cos \psi_1, \quad (5.19)$$

$$J'_{2 \rightarrow \infty} = n U_2 \cos \psi_2, \quad (5.20)$$

missä $\psi_{1(2)}$ on magneettikentän ja shokin normaalin välinen kulma ylävirran (alavirran) puolella. Hiukkasen todennäköisyys karata alavirtaan on edelleen näiden suhde,

$$P'_{2 \rightarrow \infty} = \frac{4 U_2 \cos \psi_2}{v \cos \psi_1}. \quad (5.21)$$

Huomioiden edellämainitut muutokset ja peilautumisen mahdollisuuden, keskimääräiseksi liikemäärän muutokseksi tulee

$$\frac{\langle \Delta p \rangle}{p_0} = \frac{4}{3} \left(\frac{U_1}{v} - \frac{U_2 \cos \theta_2}{v \cos \theta_1} \right). \quad (5.22)$$

Nämä yhtälöt ovat muodollisesti samat kuin aiemmin saadut, eli (5.6) ja (5.13). Täten ne johtavat samaan spektri-indeksiin kuin aiemminkin (vinolle shokille puristussuhde $X = U_1 \cos \psi_1 / U_2 \cos \psi_2$).

Poikittaisen shokin tapauksessa joudutaan oletamaan, että shokkirintaman molemmilla puolilla on sirontavapaa alue joka on leveydeltään ainakin hiukkasen gyrosäteen suuruinen. Sironnan salliminen tällä alueella muuttaisi merkittävästi peilautumisen todennäköisyyttä ja siten myös keskimääräistä energian muutosta shokin ylityksessä [11].

6 Testihiukkassimulaatio

Kesäharjoitteluiden tuloksena vuosina 2003 ja 2004 syntyi koodi, jolla voidaan laskea testihiukkasten ratoja epärelativistisesti annetussa sähkömagneettisessa kentässä. Tämä tarkoittaa, että simuloitavien hiukkasten vaikutus taustan plasman liikkeeseen ja sähkömagneettiseen kenttään oletetaan olevan niin vähäistä, ettei sitä tarvitse huomioida. Tarkoituksena on tutkia protonien energiamuutoksia koronassa alueella, jonka läpi kulkee shokkiaalto. Korkeaenergiaisten protonien lukumäärä taustan plasmaan verrattuna voidaan havaintojen perusteella olettaa pieneksi.

Yleensä ollaan kiinnostuneita vain johtokeskuksen radasta mutta alueella, jossa magneettikenttä muuttuu voimakkaasti, on tarpeen laskea ”oikean” hiukkasen rata mahdollisimman tarkasti. Tämä edellyttää radan integrointia Lorentzin voimasta ja johtokeskuksen liikeyhtälöstä sekä muunnosta johtokeskuksen arvoista ”Lorentzin hiukkasen” arvoihin ja päinvastoin. Samoin annetuista alkutiedoista pitää pystyä laskemaan varauksen nopeus ja paikka alkuhetkellä mahdollisimman tarkasti. Alkutiedot voidaan antaa monella eri tapaa, tässä ratkaisussa on päädytty määräämään

- hiukkasen massa ja varaus
- johtokeskuksen paikka, kokonaisenergia (keV) ja nousukulma
- ajanhetki, josta radan laskeminen aloitetaan.

Simulaatiossa on kätevää käyttää kahta eri koordinaatistoa eli ylävirran (Auringon) ja shokin lepokoordinaatistoja. Lorentzin voimaa on tarpeen käyttää vain shokin lähistöllä, muualla rata voidaan laskea nopeammin johtokeskusapproksimaatiolla (2.13). Shokkia mallinnetaan äärellisen kokoisella tasolla, joka etenee koronaa mallintavassa kentässä vakionopeudella. Sähkö- ja magneettikentät shokin koordinaatistossa saadaan laskettua analyttisesti luvussa 3 esitellyillä menetelmillä. Auringon koordinaatistossa plasman oletetaan olevan levossa, joten siellä ei ole sähkökenttää lukuunottamatta alavirran aluetta shokin takana. Shokin ja ylävirran koordinaatistot ovat kulmassa toisiinsa nähden, joten Galilei -muunnosten lisäksi vektorisuureet täytyy vielä kiertää.

Diffusiivinen kiihdytys on toteutettu ”kovapallosirontana”, eli varauksen nopeusvektorin suunta satunnaistetaan ylä/alavirran lepokoordinaatistossa. Tällöin nousukulmasironnan lisäksi tulee diffuusiota magneettikentän poikki. Sirontaa tehdään kahdella alueella shokin molemmin puolin, joiden leveydet ovat säädettävissä. Hiukkasen saapuessa sironta-alueeseen arvotaan ajanhetki, jolloin se sirotetaan ellei se ole ehtinyt liikkua alueen ulkopuolelle.

Simulaatiosta saatavaa energiaspektriä voidaan parantaa monistamalla korkeaa energisiä hiukkasia ja vastaavasti pienentämällä niiden statistista painoa. Käytännössä tämä toteutettiin siten, että hiukkasen suhteellisen energian kasvaessa tietyn suuruiseksi verrattuna alkutilan energiaan, lopetetaan radan laskeminen ja johtokeskuksen arvot kirjoitetaan n kertaa tiedostoon. Tiedostosta ne luetaan uusina hiukkasina, joiden painoarvo statistiikoissa on $\frac{1}{n}$.

Pääpiirteissään simulaation rakenne on siis seuraavanlainen:

- Ensin ohjelma alustaa oman tilansa sellaiseksi, että ratojen integrointi voidaan aloittaa. Tämä sisältää mm. tarvittavien tiedostojen avaamisen ja tarkasteltavan systeemin kenttien laskemisen (jos tarpeen).
- Jokaista simuloitavaa hiukkasta kohden:
 1. Luetaan hiukkasen alkutila tiedostosta.
 2. Ratkaistaan käytettävä integroija (Lorentzin voima/johtokeskus).
 3. Alkuarvoista lasketaan muut tarvittavat suureet, esimerkiksi magneettinen momentti tai gyrovektorin tarkka arvo.
 4. Rataa integroidaan ajassa eteenpäin Δt verran. Jokaisella aika-askeleella
 - (a) tarkistetaan, pitääkö käytettävää integroijaa vaihtaa. Tarpeen tullen tehdään koordinaatistomuunnos ylävirran ja shokin lepokoordinaatistojen välillä.
 - (b) lasketaan uudet nopeus- ja paikkavektorit sekä kentät uudessa paikassa.
 - (c) testataan tarvitseeko hiukkanen sirottaa.
 - (d) testataan tarvitseeko hiukkanen jakaa.
 - (e) testataan lopetetaanko radan laskeminen.
 5. Kirjoitetaan hiukkasen alku- ja lopputila tiedostoon ja palataan kohtaan (1) niin kauan, kuin simuloitavia hiukkasia on jäljellä.

Seuraavassa kerrotaan tarkemmin eri vaiheiden toteutuksesta.

6.1 Radan integrointi

Sekä Lorentzin voima että johtokeskuksen liikeyhtälö ovat käytännön toteutuksen kannalta samaa muotoa,

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (6.1)$$

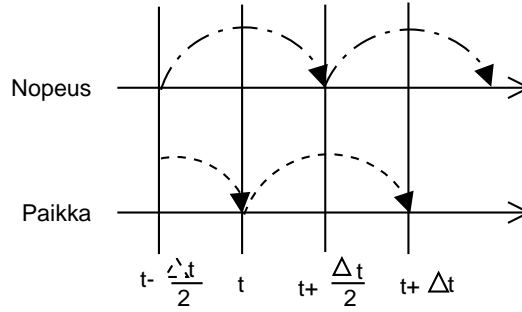
missä

$$\mathbf{F} = \begin{cases} q\mathbf{E} & \text{gyrohiukkaselle} \\ q\mathbf{E} - \mu \nabla B & \text{johtokeskukselle} \end{cases} \quad (6.2)$$

Yhtälössä (6.1) olevalla nopeudella tarkoitetaan joko gyrohiukkasen tai johtokeskuksen nopeutta. Liikkeyhtälö voidaan jakaa kahdeksi ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöksi

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (6.3)$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}. \quad (6.4)$$



Kuva 6: Leapfrog-menetelmässä hiukkasen paikka ja nopeus tunnetaan lomittaisina ajanhetkinä. Uusi nopeus hyppää vanhan paikan yli ja uusi paikka hyppää uuden nopeuden yli.

Diskretisoimalla nämä yhtälöt keskitetysti ajan suhteen *Leapfrog*-menetelmää käyttäen saavutetaan toisen kertaluvun tarkkuus käytettävän aika-askeleen suhteen. Leapfrog-nimi tulee siitä, että paikan (ja kenttien) ja nopeuden arvot tunnetaan lomittaisina ajanhetkinä, ja uusi nopeus ikäänkuin ”hyppää” (kuva 6) tunnetun vanhan paikan yli. Diskretisoidut liikkeyhtälöt yhtälöt ovat [3]

$$\frac{\mathbf{v}^{t+\Delta t/2} - \mathbf{v}^{t-\Delta t/2}}{\Delta t} = \frac{1}{m} \mathbf{F}^t + \frac{q}{m} \left[\frac{\mathbf{v}^{t+\Delta t/2} + \mathbf{v}^{t-\Delta t/2}}{2} \times \mathbf{B}^t \right], \quad (6.5)$$

$$\frac{\mathbf{r}^{t+\Delta t} - \mathbf{r}^t}{\Delta t} = \mathbf{v}^{t+\Delta t/2}, \quad (6.6)$$

missä yläindeksit viittaavat ajanhetkeen, jonka arvoa käytetään laskuissa. Yhtälö (6.5) voidaan ratkoa useammalla tavalla, tässä ohjelmassa käytetään niin kutsuttua *Boriksen* menetelmää [3]. Seuraavassa käsitellään vain Lorentzin voiman tapaus $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, johtokeskuksen yhtälöt saadaan vastaavalla tavalla. Nopeusyhtälöä voidaan yksinkertaistaa tekemällä sijoitukset

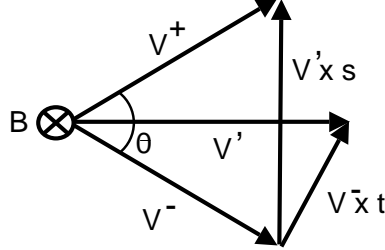
$$\mathbf{v}^{t-\Delta t/2} = \mathbf{v}^- - \frac{q\mathbf{E}^t \Delta t}{m} \frac{1}{2}, \quad (6.7)$$

$$\mathbf{v}^{t+\Delta t/2} = \mathbf{v}^+ + \frac{q\mathbf{E}^t \Delta t}{m} \frac{1}{2}, \quad (6.8)$$

jolloin sähkökenttä eliminoiduu. Jäljelle jää yhtälö

$$\mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^- = \frac{q\Delta t}{2m}(\mathbf{v}^+ + \mathbf{v}^-) \times \mathbf{B}^t, \quad (6.9)$$

joka on pelkkä nopeusvektorin rotaatio magneettikentän ympäri.



Kuva 7: Nopeuden rotaatiossa käytettävät apuvektorit.

Hiukkaselle siis annetaan ensin puolet kiihdytyksestä, nopeusvektoria kiertetään magneettikentän ympäri, ja annetaan toinen puolikas kiihdytyksestä. Näin saatua uutta nopeutta käytetään uuden paikan laskemiseen. Rotaation toteuttamiseksi muodostetaan ensin apuvektori

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}^- + \mathbf{v}^- \times \mathbf{t}. \quad (6.10)$$

Kulma vektorien \mathbf{v}' ja \mathbf{v}^- välillä on puolet rotaatiokulmasta (Kuva 7), joten

$$\mathbf{t} = -\mathbf{b} \tan \frac{\theta}{2} = \frac{q\mathbf{B}}{m} \frac{\Delta t}{2}. \quad (6.11)$$

Vektori $\mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^-$ on samansuuntainen vektorin $\mathbf{v}' \times \mathbf{B}$ kanssa, jolloin

$$\mathbf{v}^+ = \mathbf{v}^- + \mathbf{v}' \times \mathbf{s}, \quad (6.12)$$

missä \mathbf{s} on samansuuntainen magneettikentän kanssa ja sen suuruus on sellainen, että $|\mathbf{v}^-| = |\mathbf{v}^+|$,

$$\mathbf{s} = \frac{2\mathbf{t}}{1 + t^2}. \quad (6.13)$$

Edellä kuvatulla tavalla saadaan hiukkasen (gyrohiukkanen tai johtokeskus) rataa integroitua ajassa eteenpäin kunhan sen alkutila, eli paikka- ja nopeusvektorit, ovat tiedossa. Leapfrogin käynnistämiseksi nopeusvektoria on ensin siirrettävä ajassa $\Delta t/2$ verran taaksepäin. Tämä voidaan suorittaa lisäämällä puolet kiihdytyksestä ja tekemällä rotaatio käyttäen aika-askelta $-\Delta t/2$.

6.2 Alkuarvojen laskeminen integroijille

Jokaisen simuloitavan hiukkasen johtokeskuksen tila on kirjoitettu ohjelman syöttötiedostoon. Alkutilan määräävät parametrit olivat:

- Johtokeskuksen paikkavektorin komponentit
- Hiukkasen varaus, massa, energia ja nousukulma.
- Ajanhetki, jossa em. arvot on annettu ja josta eteenpäin rataa lasketaan.

Näistä tiedoista voidaan laskea kaikki muut tarvittavat suureet, eli johtokeskuksen nopeusvektori, gyrosäde (-vektori) ja magneettinen momentti, kun sähkö- ja magneettikentän arvot tunnetaan alkupaikassa. Magneettikentän suuntaisen nopeuden lisäksi johtokeskuksella voi olla kulkeutumismopeuksia poikittaiseen suuntaan, mistä johtuen edellä mainitut alkuarvot voidaan käsitellä muutamalla eri tavalla. Tässä niiden käsitetään tarkoittavan seuraavaa:

- Energia on hiukkasen gyroliikkeen yli keskiarvoistettu kineettinen energia. Se sisältää kentänsuuntaisen ja gyroliikkeen nopeudet ja kulkeutumis-
- Nousukulma on määritetty koordinaatistossa, jossa kulkeutumismopeudet häviävät.

Nopeusvektorin laskemiseksi tehdään yksinkertaistava oletus, että vain sähköisellä kulkeutumismopeudella on merkitystä. Varsinkin gradienttikulkeutuksen huomioiminen hankaloittaisi asioita, koska sen laskemiseen tarvitaan magneettisen momentin arvoa. Magneettinen momentti pitäisi kuitenkin laskea koordinaatistossa, jossa kulkeutumis-

6.2.1 Johtokeskusintegroijan alkuarvojen laskeminen

Johtokeskusintegroija tarvitsee nopeusvektorin lisäksi magneettisen momentin arvon. Ne saadaan seuraavasti (kenttien arvot lasketaan johtokeskuksen paikassa):

1. Siirrytään nopeudella $\mathbf{V}^* = \mathbf{V}_{jk} - \mathbf{V}_{E \times B}$ liikkuvaan koordinaatistoon. Tällöin nousukulman ja magneettisen momentin arvot eivät riipu gyroliikkeen vaihekulmasta.
2. Energia $\langle W^* \rangle = \langle W \rangle - \frac{1}{2} m V_{E \times B}^2$, missä $\langle W \rangle$ on annettu kineettinen energia. Keskiarvoisen energian muuntuminen (6.16).
3. Johtokeskuksen nopeus $\mathbf{V}_{jk} = \sqrt{\frac{2\langle E^* \rangle}{m}} \cos \alpha \mathbf{b} + \mathbf{V}_{E \times B}$, missä α on annettu nousukulma ja \mathbf{b} magneettikentän suuntainen yksikkövektori.
4. Magneettinen momentti $\mu = \frac{\langle W^* \rangle \sin^2 \alpha}{B}$.

Johtokeskusintegroija ei seuraa energian tai nousukulman arvoa, joten integroijan vaihdon ja koordinaatistomuunnoksien yhteydessä täytyy nämä laskea uudestaan. Uudet arvot ovat:

1. Nopeuden muunnos $\mathbf{V}^* = \mathbf{V}_{gc} - \mathbf{V}_{E \times B}$.
2. Energia $\langle W \rangle = \frac{1}{2}m(V^{*2} + V_{E \times B}^2) + \mu B$.
3. Nousukulma $\alpha = \tan^{-1} \sqrt{\frac{2\mu B}{mV^{*2}}}$

6.2.2 Gyrohiukkasintegroijan alkuarvojen laskeminen

Lorentzin voiman integroija ei tarvitse magneettisen momentin tai nousukulman arvoa, mutta sen on kyettävä ne laskemaan. Näiden sijaan varauksen tarkan paikan on oltava tiedossa. Koska gyroliikkeen vaihekulmaa ei anneta, arvotaan se tasaisesti jakautuneeksi välille $[0, 2\pi]$. Alkuarvot lasketaan seuraavien vaiheiden mukaan:

1. Nopeuden muunnos $\mathbf{V}^* = \mathbf{V} - \mathbf{V}_{E \times B}$.
2. Energia $\langle W^* \rangle = \langle W \rangle - \frac{1}{2}mV_{E \times B}^2$.
3. Kentänsuuntainen nopeus $V_{||} = \sqrt{\frac{2\langle W^* \rangle}{m}} \cos \alpha$.
4. Gyroliikkeeseen liittyvä nopeus $V_{gyro} = \sqrt{\frac{2\langle W^* \rangle}{m}} \sin \alpha$.
5. Gyrosäde $\rho = \frac{mV_{gyro}}{|q|B}$.

Kenttien arvot on edellisissä yhtälöissä jälleen laskettu johtokeskuksen paikassa. Gyrovektori ja gyroliikkeen nopeusvektori ovat kummatkin kohtisuorassa magneettikenttän suuntaan. Gyrovektorin suunnan satunnaistaminen voidaan tehdä seuraavasti:

- Magneettikenttä on annettu ylävirran tai shokin karteesisessa koordinaatistossa. Kierretään tätä koordinaatistoa z -akselin ympäri satunnaisen kulman $\gamma \in [0, 2\pi]$ verran. Olkoon tämän kierretyn koordinaatiston yksikkövektorit $\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}'$.
- Sovitaan, että gyrovektori on \mathbf{x}' -akselin suuntaan ja gyroliikkeen nopeusvektori $-\mathbf{y}'$ -akselin suuntaan (tai $+\mathbf{y}'$ -suuntaan, jos $q < 0$).
- Kierretään pilkullista koordinaatistoa siten, että $\mathbf{z}' \parallel \mathbf{b}$.

Edellä mainitut vaiheet tekevä muunnosmatriisi on

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \gamma \cos \phi - \sin \gamma \sin \phi & \cos \theta \sin \gamma \cos \phi + \cos \gamma \sin \phi & \sin \theta \cos \phi \\ -\cos \theta \cos \gamma \sin \phi - \sin \gamma \cos \phi & -\cos \theta \sin \gamma \sin \phi + \cos \gamma \cos \phi & -\sin \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \cos \gamma & -\sin \theta \sin \gamma & \cos \theta \end{pmatrix},$$

missä

$$\begin{aligned}\theta &= -\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{B_x^2 + B_y^2}}{B_z}\right), \\ \phi &= -\cos^{-1}\left(\frac{B_x}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2}}\right)\end{aligned}$$

ovat \mathbf{B} :n pallokoordinaatiston kulmat pilkuttomassa koordinaatistossa. Pilkullisen kannan yksikövektorit \mathbf{e}'_i saadaan muunnosmatriisin avulla

$$\mathbf{e}'_i = \mathfrak{M} \mathbf{e}_i \quad (6.14)$$

Näiden vaiheiden jälkeen saadaan loput gyrohiukkasintegroijan tarvitsemista tiedoista, eli

6. Hiukkasen paikka $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{gc} + \rho \mathbf{x}'$, missä \mathbf{r}_{gc} on annettu johtokeskuksen paikka.

7. Nopeusvektori $\mathbf{V} = \mathbf{V}_{||} + V_{gyro} \mathbf{y}' + \mathbf{V}_{E \times B}$.

Johtokeskuksen paikka, energia, nousukulma ja magneettinen momentti saadaan laskettua vastaavalla tavalla “takaperoisesti” kuin johtokeskusintegroijaa käytettäessä.

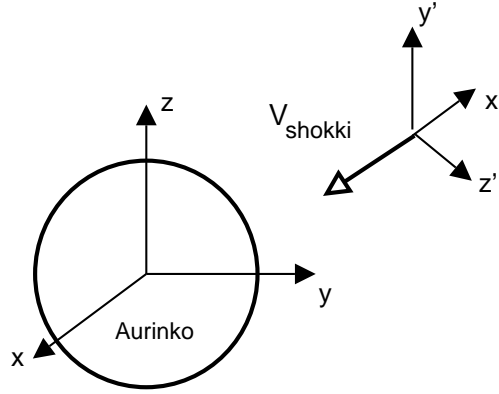
6.3 Koordinaatistomuunnokset

Shokkiaaltoja ja ylävirran magneettikenttää on kätevintä käsitellä eri karteesisissa koordinaatistoissa. Yleisessä tapauksessa shokkiaalto liikkuu ylävirran koordinaatistossa nopeudella \mathbf{V}_{shokki} , joten koordinaatistot ovat kiertyneet toisiinsa nähden. Merkitään pilkullisilla koordinaateilla shokin ja pilkuttomilla ylävirran koordinaatistoa. Muunnosmatriisi koordinaatistojen välille saadaan seuraavasti:

Asetetaan \mathbf{x}' -suuntainen yksikkövektori suunnaltaan vastakkaiseksi shokin nopeusvektoriin, eli se on shokin normaalin suuntainen. Yksikkövektorin \mathbf{z}' komponentit ylävirran koordinaatistossa on annettava ohjelman asetustiedostossa. Nämä määräävät kolmannen yksikkövektorin $\mathbf{y}' = -\mathbf{x}' \times \mathbf{z}'$ komponentit ja rotaatiomatriisiksi ylävirran ja shokin koordinaatistojen välille tulee

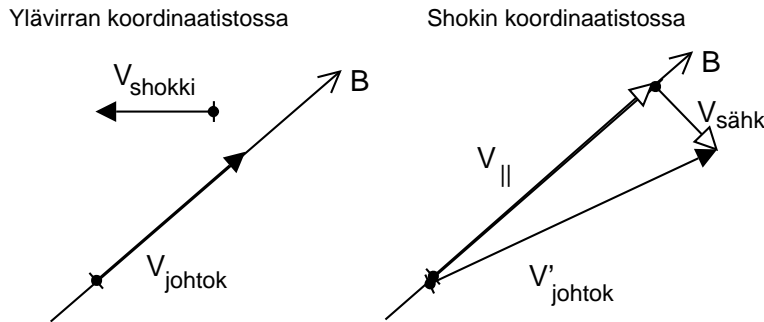
$$\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} x'_x & y'_x & z'_x \\ x'_y & y'_y & z'_y \\ x'_z & y'_z & z'_z \end{pmatrix}. \quad (6.15)$$

Muunnosmatriisi shokin koordinaatistosta ylävirran koordinaatistoon on tämän käänteismatriisi \mathfrak{R}^{-1} .



Kuva 8: Shokkiaalto (pilkullinen koordinaatisto) liikkuu Auringon keskipisteeseen nähden nopeudella \mathbf{V}_{shokki} . Shokin koordinaatisto on asetettu siten, että \mathbf{x}' -akseli on vastakkaisuuntainen nopeusvektorille ja shokki on $y'z'$ -tasossa.

Hiukkasen tilan muuntaminen shokkilaatikon liikkuvaan koordinaatiston ja ylävirran lepokoordinaatiston välillä tehdään epärelativistisesti Galilein muunnoksella. Hiukkasen alku- ja lopputila kirjoitetaan integroinnin päättyessä tulostiedostoon ylävirran lepokoordinaatistossa, joten myös energia ja nousukulma on muunnettava paikka- ja nopeusvektorien lisäksi.



Kuva 9: Johtokeskuksen nopeus \mathbf{V}_{jk} ylävirran plasman lepokoordinaatistossa on pitkin kenttäviivaa ja shokki liikkuu nopeudella \mathbf{V}_{shokki} . Shokin koordinaatistossa johtokeskuksen nopeus $\mathbf{V}'_{jk} = \mathbf{V}_{jk} - \mathbf{V}_{shokki}$ jakautuu kenttensuuntaiseksi ja sähköiseksi kulkeutumisa nopeudeksi.

Nousukulman ja keskiarvoisen energian laskeminen muunnoksissa monimutkaistaa hieman tilannetta, koska shokkiaallon koordinaatistossa plasma ei virtaa magneettikentän suuntaan, joten siellä on plasman liikkeen indusoima sähkökenttä $\mathbf{E}' = -\mathbf{V}'_{plasma} \times \mathbf{B}'$ sekä ylä- että alavirran puolella. Ylävirran lepokoordinaatistossa ei ole sähkökenttää *paitsi shokkirintaman takana alavirran puolella*. Galilein muunnos jakautuu magneettikentän suuntaiseen

ja sitä vastaan kohtisuoraan osaan, $\mathbf{U}_{galilei} = \mathbf{U}_{\parallel} + \mathbf{U}_{\perp}$. Indusoitunut sähkökenttä antaa hiukkaselle sähköisen kulkeutumisnopeuden, joka vastaa muunnoksen poikittaista osaa. Gyroliikkeen yli keskiarvoistettava energia voidaan laskea esimerkiksi johtokeskuksen paikkaan kiinnitetyssä lokaalissa sylinterikoordinaatistossa. Sovitaan yksinkertaisuuden vuoksi, että $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ ja muunnoksen poikittainen osa $\mathbf{U}_{\perp} = U_{\perp}\mathbf{e}_x$ jolloin

$$\begin{aligned}\mathbf{V} - \mathbf{U} &= (V_{\parallel} - U_{\parallel})\mathbf{e}_z + (V_{gyro} \cos \phi(t) - U_{\perp})\mathbf{e}_x + V_{gyro} \sin \phi(t)\mathbf{e}_y, \\ \langle |V - U|^2 \rangle &= |V_{\parallel} - U_{\parallel}|^2 + V_{gyro}^2 + U_{\perp}^2.\end{aligned}$$

Merkinnällä $\langle \dots \rangle$ tarkoitetaan keskiarvoistamista gyroliikkeen vaihekulman $\phi(t)$ yli. Tämän perusteella

$$\begin{aligned}\langle W \rangle &= \frac{1}{2}m(V_{jk}^2 + U^2) + \mu B - 2\mathbf{V}_{jk} \cdot \mathbf{U}, \\ &= \frac{1}{2}m(V_{jk,\parallel}'^2 + V_{E \times B}^2) + \mu B.\end{aligned}\tag{6.16}$$

eli gyroliikkeeseen liittyvä energia säilyy koordinaatistomuunnoksissa, samoin kuin magneettinen momentti.

6.3.1 Muunnos ylävirrasta shokkiin

Hiukkasen paikka ja nopeus shokkilaatikon koordinaatistossa ovat

$$\mathbf{R}'_{jk} = \mathfrak{R}(\mathbf{R}_{jk} - \mathbf{R}_{shokki}),\tag{6.17}$$

$$\mathbf{V}'_{jk} = \mathfrak{R}(\mathbf{V}_{jk} - \mathbf{V}_{shokki}),\tag{6.18}$$

missä \mathfrak{R} oli rotaatiomatriisi (6.15) koordinaatistojen välillä. Uusi pitkittäinen nopeus saadaan yhtälöstä

$$\mathbf{V}'_{jk,\parallel} = \mathbf{V}'_{jk} - \mathbf{V}_{E \times B},\tag{6.19}$$

missä sähköinen kulkeutumisnopeus on laskettu sen puolen kenttien arvoja käyttäen (ylävirta/alavirta) mihin muunnos tehdään. Uusi nousukulma ja energia ovat

$$\langle \alpha' \rangle = \tan^{-1}\left(\frac{v'_{gyro}}{V'_{jk,\parallel}}\right),\tag{6.20}$$

$$\langle W' \rangle = \frac{1}{2}mV_{jk}'^2 + \mu B'.\tag{6.21}$$

Magneettinen momentti ei muuttunut, joten $V'_{gyro} = \sqrt{\frac{2\mu B'}{m}}$.

6.3.2 Muunnos shokista ylävirtaan

Ylävirran koordinaatistossa oleva sähkökenttä saadaan helpoiten laskemalla se ensin shokin koordinaatistossa ja kiertämällä sitten ylävirran koordinaatistoon,

$$\mathbf{E}' = \begin{cases} -(\mathbf{V}'_{plasma,2} - \mathbf{V}'_{plasma,1}) \times \mathbf{B}'_2 & \text{alavirran puolella} \\ 0 & \text{kaikkialla muualla} \end{cases} \quad (6.22)$$

$$\mathbf{E} = \mathfrak{R}^{-1} \mathbf{E}' \quad (6.23)$$

Muuten muunnos tapahtuu vastaavaan tapaan kuin edellisessä kappaleessa ollut muunnos ylävirrasta shokkiin, eli

$$\mathbf{R}_{jk} = \mathfrak{R}^{-1} \mathbf{R}'_{jk} + \mathbf{R}_{shokki} \quad (6.24)$$

$$\mathbf{V}_{jk} = \mathfrak{R}^{-1} \mathbf{V}'_{jk} + \mathbf{V}_{shokki} \quad (6.25)$$

$$\mathbf{V}_{jk,||} = \mathbf{V}_{jk} - \mathbf{V}_{E \times B} \quad (6.26)$$

$$\langle \alpha \rangle = \tan^{-1} \left(\frac{v_{gyro}}{V_{jk,||}} \right) \quad (6.27)$$

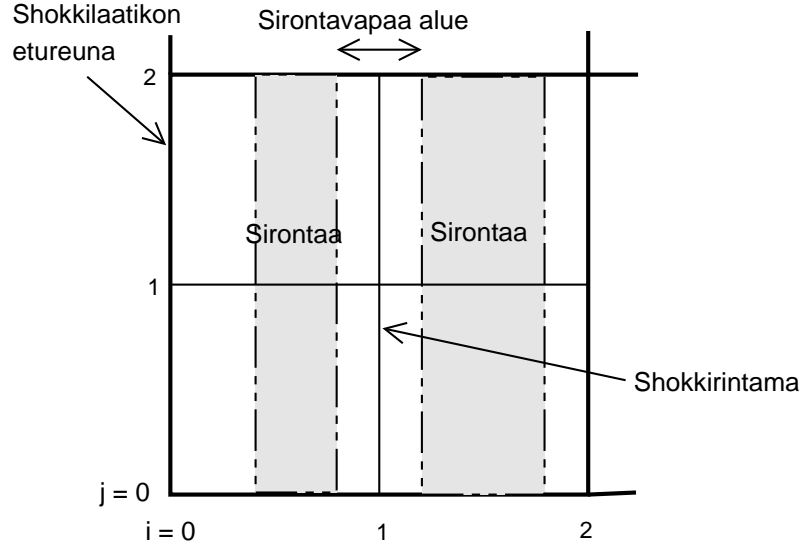
$$\langle W \rangle = \frac{1}{2} m (V_{jk}^2 + V_{E \times B}^2) + \mu B \quad (6.28)$$

6.4 Sironta

Diffusiivisen shokkikiihdytyksen mallintamiseksi koodiin on lisättävä sirontaa mallintava osuus. Teorian mukaan korkeaenerginen ioni voi sirota shokin ympäristössä magnetosonisella Alfvénin nopeudella liikkuvista aalloista, joita se voi itse tuottaa liikkueessaan yliafvénisella nopeudella. Sironta on elastista nousukulmasirontaa ylä/alavirran termisen plasman lepokoordinaatistossa. Diffusiivisen shokkikiihdytyksen teoriassa (luku 5) jouduttiin tekemään myös oletus sirontavapaasta alueesta shokkirintaman molemmin puolin, jonka leveys on ainakin gyrosäteen suuruusluokkaa. Koodiin toteutettiin säädettyä levyiset sirottavat ja sirontavapaat alueet sekä ylä- että alavirran puolelle. Tämä mahdollistaa tulosten vertailun Monte-Carlo-simulaatioiden tuloksiin (joissain toteutuksissa on pakko jättää sironta pois hiukkasen ylitäessä shokkirintamaa). Toisaalta tällä voidaan myös erottaa shokkikiihdytyksen (luku 4) ja sironnan vaikutukset toisistaan.

Sirontaa tehdään vain shokkilaatikon sisällä käytettäessä gyrohiukkasintegroijaa. Johtokeskusintegroijaa käytettäessä on sellainen hankaluus, että hiukkasen nousukulman arvoa ei seurata ja sen laskeminen vaatii suhteellisen paljon suoritusaikaa.

Jokaisella ajanhetkellä varauksella on jokin todennäköisyys sirota ollessaan sironta-alueiden sisällä. Suoritusaikaa voidaan säästää jatkuvan todennäköisyyden testaamisen sijaan laskemalla seuraava ajanhetki, jolloin hiukkanen



Kuva 10: Sironta-alueiden sijoittaminen shokkilaatikkoon. Aivan shokkirintaman (hilapisteet $x_{1,j}$) molemmiin puolin on sirontavapaat alueet. Sironta-alueet ylävirrassa ja alavirrassa voidaan asettaa eri levyisiksi kuitenkin siten, että ne ovat kapeampia kuin Δx (matka kahden hilapisteen välillä).

siroaa. Kun $t > t_{sironta}$ ja hiukkanen on edelleen samassa sironta-alueessa, tehdään sironta. Jos varaus liikkuu sironta-alueen ulkopuolelle laskettu aika hylätään.

Sironta-aika lasketaan arpomalla ensin eksponentiaalisesti jakautunut satunnaisluku

$$X_{eksp} = -\ln(X_{tas}), \quad (6.29)$$

$$t_{sironta} = t_{nyt} + C \cdot T_{gyro} \cdot X_{eksp}, \quad (6.30)$$

missä X_{tas} on välillä $]0, 1]$ tasaisesti jakautunut satunnaisluku, $T_{gyro} = \frac{2\pi}{\omega_{gyro}}$ on yhteen gyrokierrokseen kuluva aika ja C jokin parametrina annettu vakio jonka avulla voidaan säätää sironnan vapaan matkan pituutta.

Elastisen sironnan laskemiseksi muunnetaan hiukkasen nopeus ensin ylä / alavirran plasman lepokoordinaatistoon, riippuen siitä kummalla puolella shokkia ollaan,

$$\mathbf{V}_{vanha} = \mathbf{V}'_{varaus} - \mathbf{U}_{plasma}. \quad (6.31)$$

Uusi nopeusvektori lasketaan käyttäen hyväksi pallokoordinaatistoa (shokin koord. plasma virtaa x' -akselin suuntaisesti),

$$V_{uusi,x'} = V_{vanha} \sin \theta \cos \phi + U, \quad (6.32)$$

$$V_{uusi,y'} = V_{vanha} \sin \theta \sin \phi, \quad (6.33)$$

$$V_{uusi,z'} = V_{vanha} \cos \theta. \quad (6.34)$$

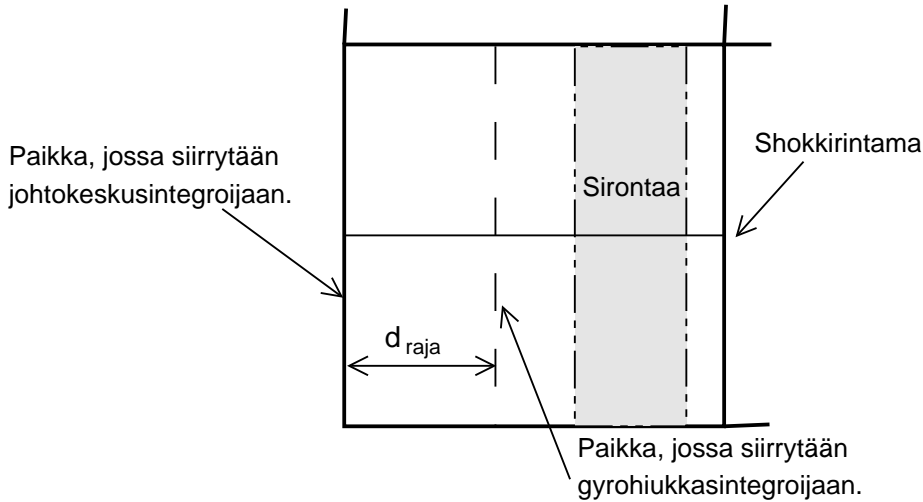
Edellä $\cos \theta$ arvotaan tasaisesti välille $[-1, 1]$ ja ϕ välille $[0, 2\pi]$. Tällä tavalla toteutetussa sironnassa varaus diffundoituu vähän myös kenttäviivojen poikki. Satunnaisluvut tuotetaan *Ranmar*-algoritmillä, jonka jakso on 2^{144} [9].

6.4.1 Käytettävän integroijan vaihtaminen

Kuten aiemmin on jo tullut ilmi, shokkilaatikon sisällä käytetään gyrohiukkasintegroijaa ja sen ulkopuolella johtokeskusintegroijaa. Vaihtaminen gyrohiukkasintegroijaan tehdään shokkilaatikon sisällä, kun johtokeskuksen etäisyys laatikon etureunaan on riittävän pieni (rajaetäisyys annetaan parametrina). Merkitään shokkilaatikon etureunan yksikkönormaalialia $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{V}_{shokki}}{V_{shokki}}$, jolloin johtokeskuksen etäisyys shokista on

$$d = \mathbf{R}_{suht} \cdot \mathbf{n}, \quad (6.35)$$

ja $\mathbf{R}_{suht} = \mathbf{R}_{jk} - \mathbf{R}_{shokki}$ on johtokeskuksen paikka shokkiin nähden. Kun d menee riittävän pieneksi, siirrytään käyttämään gyrohiukkasintegroijaa ja shokkilaatikossa laskettuja kenttiä. Muunnokset koordinaatistojen välillä tehdään aiemmin käsitellyllä tavalla. Etäisyydelle d_{raja} on lisäksi sellainen kriteeri, että sen on sijaittava laatikon etureunan ja sirona-alueen välisellä alueella.



Kuva 11: Sirona-alue ja paikat, joissa vaihdetaan käytettävää integroijaa. Etäisyydet liioiteltuja.

Johtokeskusintegroijaan siirrytään, kun gyrohiukkanen on riittävän lähellä laatikon etureunaa, eli on selvästi karkaamassa shokista ja sirona-alueen

ulkopuolella. Etäisyys laatikon etureunaan on helpompi laskea kuin ylävirran koordinaatistossa, nyt se on pelkästään hiukkasen paikkavektorin x' -komponentti. Etäisyyden d_{raja} ja paikan, jossa johtokeskusintegroijaan siirytään, välissä on oltava vähintään gyrosäteen suuruinen välimatka. Muutoin on mahdollista, että varaus jää poukkoilemaan kahden integroijan välille. Sopiva paikka on esimerkiksi juuri laatikon etureuna.

6.5 Hiukkasten jakaja

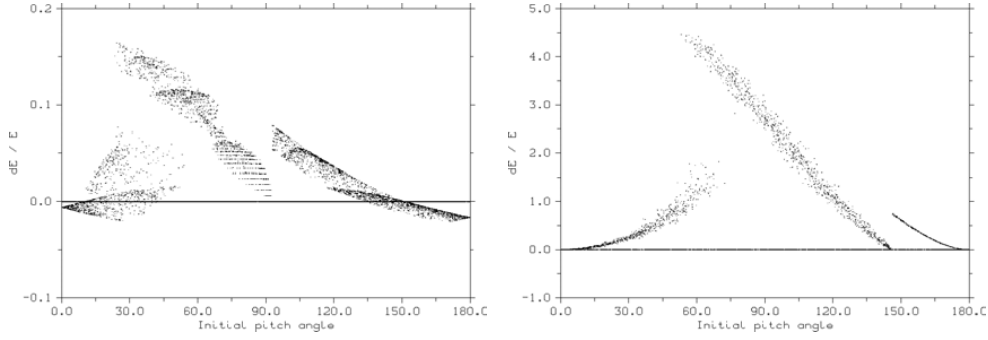
Diffusiivisellä shokkikiihdytyksellä pystytään tuottamaan esimerkiksi 100 keV:n ionipopulaatiosta ~ 100 MeV:n ioneja, energiaspektrin statistiikan kannalta ongelmaksi muodostuu se, ettei näitä hiukkasia ole kovin paljoa verrattuna kokonaismäärään. Tämän seurauksena spektrin loppupään muoto voi helposti riippua vain parin protonin energiasta. Spektriä voidaan parantaa lisäämällä simuloitavien hiukkasten kokonaismäärää. Hiukkasia pitää kuitenkin lisätä todella paljon, jotta vaikutukset alkaisivat näkyä äärimmäisissä energioissa. Vaihtoehtoisesti voidaan ottaa käyttöön *hiukkasten jakaja* (particle splitter).

Hiukkasten jaon idea on seuraava: kun hiukkasen energia ylittää jonkin kynnysarvon, $W \geq W_{kynnyks}$, hiukkanen kloonataan n :ksi identtiseksi hiukkaseksi, joiden painoarvo on lopullisessa statistiikassa $1/n$. Kloonatut hiukkaset simuloidaan kuten ”alkuperäinenkin”, jatkaen vain siitä mihin jäätin. Tällä tavalla voidaan näennäisesti lisätä korkeaenergisten hiukkasten lukumäärää, jolloin energiaspektrin loppupään muoto riippuu ”useammasta” hiukkasesta ja on siten tasaisempi.

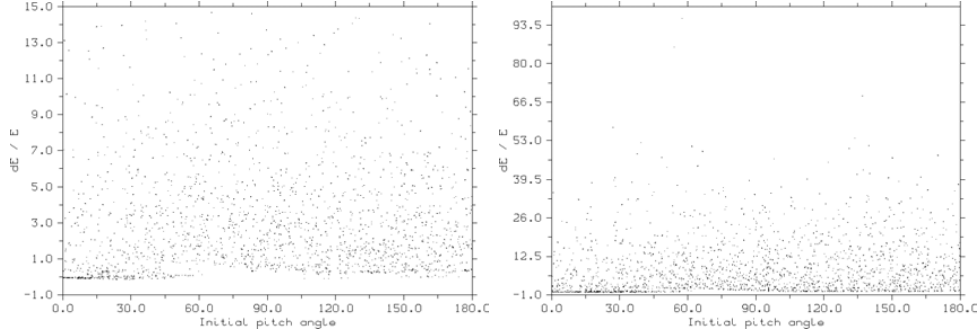
Jakaja on toteutettu siten, että jaon tapahtuessa lasketaan johtokeskuksen arvot ja kirjoitetaan ne ”jakotiedostoon” uuden painoarvon kera. Sieltä ne käydään myöhemmin lukemassa uusina hiukkasina. Jaon kynnysenergiana käytetään nykyisen ja alkutilan energian suhdetta kerrottuna jollain luvulla, $W_{kynnyks} = A \cdot W_{alku}$. Hiukkaset voivat jakautua useaan kertaan, joten alkutilan energia voi tarkoittaa myös energiaa edellisen jaon lopussa. Jakokriteeriä testataan vain m aika-askeleen välein, mikä säästää jonkin verran suoritusaikaa. Lisäksi varauksen energia ylävirran koordinaatistossa on vakio käytettäessä johtokeskusintegroijaa, joten silloin testausta ei tarvitse tehdä. Gyrohiukkasintegroijan aika-askeleen suuruus on murto-osa yhteen gyrokierrokseen kuluva ajasta, joten tältäkin kannalta jatkuva testaaminen olisi tarpeetonta.

6.6 Testauksesta

Koodin toimivuutta on testattu toistamalla Webbin [15] laskemat analyttiset tulokset shokkikiihdytykselle (kuva 5 s. 30). 1 MeV protoneja injektointiin



Kuva 12: Simuloidut ajot Webbin käyttämässä geometriassa. (a) Vasemmalla ylävirran ja shokin normaalin välinen kulma $\psi_1 = 60^\circ$. (b) Oikealla $\psi_1 = 88^\circ$. x -akselilla on hiukkasen nousukulma injektiohetkellä, y -akselilla suhteellinen energian muutos $\Delta E/E_{alku}$ hiukkasen poistuessa shokista.



Kuva 13: Webbin 60° geometria sironnalla. (a) Vasemmalla peräkkäisten sirontojen välinen keskimääräinen aika $t_{sironta} \approx 110 t_{gyro}$. (b) Oikealla $t_{sironta} \approx 32 t_{gyro}$. x -akselilla on hiukkasen nousukulma injektiohetkellä, y -akselilla suhteellinen energian muutos verrattuna alkuhetken energiaan.

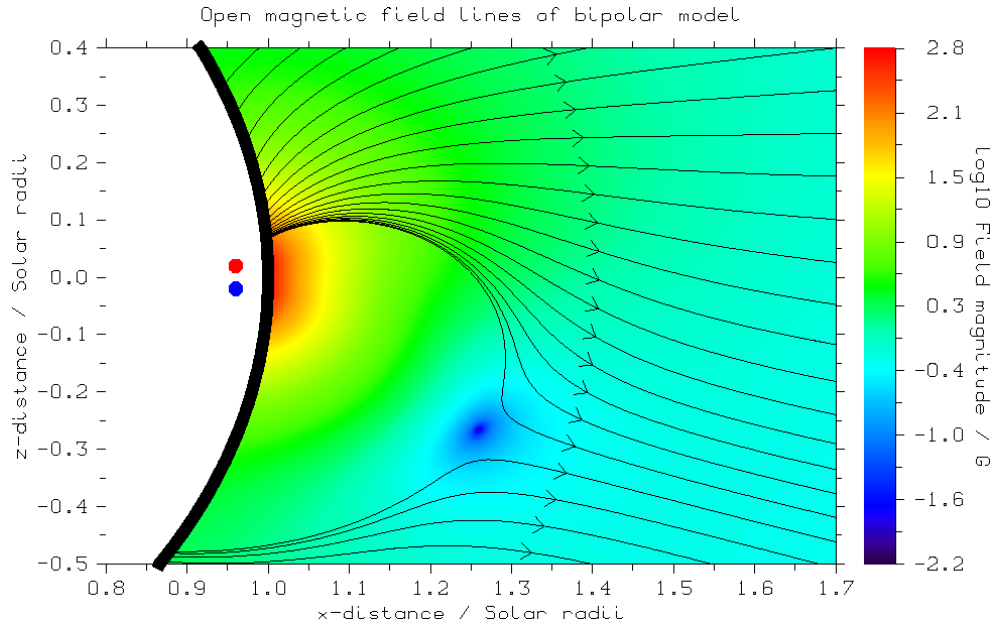
sekä ylä- että alavirran puolelle shokkia. Webbin laskuissa puristussuhde X on sellainen, että $B_2/B_1 = 3$ kaikilla shokin kaltevuuskulmilla. Kuvissa 12(a) ja 12(b) on esimerkkinä ajot $\psi_1 = 60^\circ$ ja $\psi_1 = 88^\circ$ kulmilla ylävirran kentän ja shokin normaalin välissä. Vaaka-akselilla on alkuhetken nousukulma, pystyakselilla suhteellinen energian muutos verrattuna alkutilan energiaan. Analyttisestä teoriasta tiedetään, että sen pätevyys heikkenee kaltevuuskulman pientyessä eikä se myöskään ota huomioon gyroliikkeen vaihekulmasta aiheutuvia vaikutuksia. $\psi = 88^\circ$ tapauksessa simulaation ja teorian vastaavuus on hyvä, $\psi = 60^\circ$ ajossa eroavaisuuksia näkyy enemmän.

Kuvissa 13a ja 13b on Webbin 60° geometriassa ajettu 100 keV protoneja käyttäen sirontaa. Vasemmanpuoleisesta kuvasta näkyy, että sironta on merkittävästi kasvattanut hiukkasten energiaa verrattuna tilanteeseen ilman sirontaa (kuva 12(a)). Tästä huolimatta suhteellinen energian kasvu on ol-

lut vain noin 10-15 kertainen tuottaen ~ 1 MeV protoneja. Kuvassa 13b sirontojen välistä keskimääräistä aikaa on pienennetty noin kolmannekseen edelliseen tapaukseen verrattuna. Nyt maksimienergiat ovat $\sim 5 - 6$ MeV tienoilla. Sironta-alueiden leveyksinä on käytetty 500 km:a.

7 Simulaation tulokset

Aurinkopilkkuparin ympäristöä mallinnettiin niin kutsutulla bipolikentällä. Auringon keskipisteeseen sijoitetulla, pinnalla 2 G suuruisen kentän tuottavalla, monopolilla voidaan approksimoida pakenevan aurinkotuulen synnyttämää likimain radiaalista kenttää. Auringonpilkkuparin synnyttämä suljettujen kenttäviivojen alue tuotettiin lähelle pintaa sijoitetulla monopoliparilla eli bipolilla. Monopolien voimakkuus on sellainen, että ne tuottaisivat yksinään $0.04 R_{\odot}$ etäisyydellä (lähellä pintaa) noin 800 G suuruisen magneettikentän. Monopolit sijaitsevat koordinaateissa $(0.96, 0, \pm 0.02) R_{\odot}$ (Kuva 14).



Kuva 14: Simulaatiossa käytetty bipolikenttä. Radiaalinen osa kentästä on tuotettu Auringon keskipisteeseen sijoitetulla monopolilla, suljettujen kenttäviivojen alue lähelle pintaa sijoitetulla bipolilla. Positiivinen napa on piirretty punaisella, negatiivinen sinisellä.

Koronassa etenevää shokkiaaltoja mallinnettiin äärellisen kokoisena tasona, joka sijaitsee koronassa vakionopeudella etenevän ”shokkilaatikon” sisällä. Olettaen (shokin koordinaatistossa) ylävirran plasman virtaavan kaikkialla shokin normaalin suuntaisesti, voidaan magneettikenttä alavirrassa laskea

analyttisesti nopean shokin hyppyeidoista ja sähkökenttä $\mathbf{E} = -\mathbf{V} \times \mathbf{B}$, missä \mathbf{V} on plasman virtausnopeus. Käytetty approksimaatio vastaa poikittaisen shokin hyppyeidoissa rajaa $V_A \rightarrow 0$. Shokkilaatikon sisällä shokin lepokoordinaatistossa varauksen rata laskettiin suoraan Lorentzin voimasta. Mikäli varaus liikkui ylävirran puolelle etäisyyden Δ päähän shokin tasosta, tehtiin koordinaatistomuunnos Auringon lepokoordinaatistoon ja radan laskemista jatkettiin käyttäen johtokeskuksen likeyhtälöitä. Vastaavasti varauksen tullessa etäisyyttä Δ lähemmäs shokkia siirryttiin takaisin Lorentzin voimaan ja shokin lepokoordinaatistoon.

Parametri	Arvo
Shokkitason koko	$0.45R_\odot \times 0.002R_\odot$
Sirontavapaiden alueiden leveys s	$2 \cdot 10^{-5}R_\odot$
Ylä- ja alavirran sironta-alueiden leveys δ	$9.6 \cdot 10^{-4}R_\odot$
Etäisyys Δ	$0.001R_\odot$

Taulukko 3: Simulaatiossa käytettyjen parametrien arvoja. Tarkempi selvitys parametrien merkityksestä tekstissä.

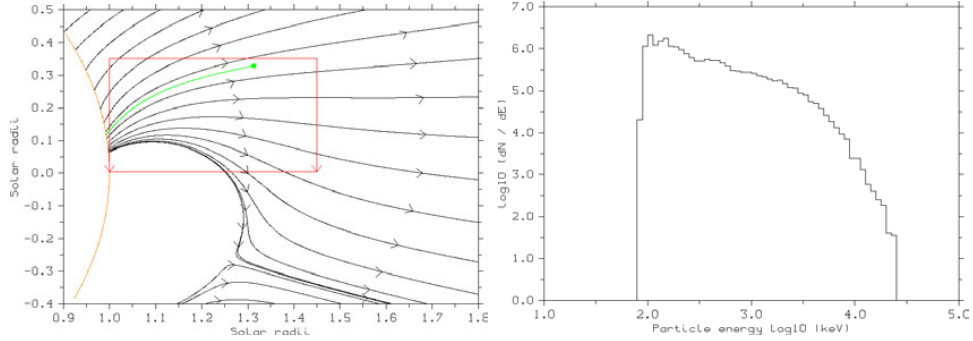
Diffusiivista shokkikiihdytystä mallinnettiin shokin ympärille sijoitetuilla sironta-alueilla (leveys δ), joiden sisäpuolella varauksella on satunnainen mahdollisuus siirtä elastisesti ylä/alavirran plasman lepokoordinaatistossa. Aivan shokin ympärillä on sirontavapaa alue (leveys s). Sironta itse toteutettiin ”kovapallosirontana”, eli varauksen nopeusvektorille arvottiin uusi satunnainen suunta. Simulaatioissa käytetyt sironta-alueet ovat todennäköisesti todellisuuteen verrattuna liian kapeat, mutta niiden leventäminen kasvattaa yhteen simulaatioajoon kuluvaan aikaa. Arvot on valittu siten, että sirontan vapaa matka on paljon sironta-alueen efektiivistä, magneettikentän kenttäviivaa pitkin laskettua leveyttä pienempi.

Simulaatioissa käytettiin kolmea eri geometriaa shokille. Lähelle shokkia injektointiin 100 keV protoneja isotrooppisella jakaumalla nousukulman kosinin suhteen. Injektiopisteet sijoitettiin kenttäviivoille, jotka leikkaavat Auringon pinnan lähellä bipolia sijaitsevaa peilipistettä. Tällöin suurin osa shokista ylävirtaan karkaavista hiukkasista kohtaa sen uudelleen eikä törmää Auringon pintaan. Hiukkaset poistettiin simulaatiosta, mikäli ne ajautuivat alavirtaan yli 2Δ etäisyydelle tai ulos laatikosta shokin tason suunnassa. Samoin Auringon pintaan osuneet varaukset poistettiin.

7.1 Bipole_down -ajot

Tässä geometriassa shokki liikkuu alaspäin kohti peilipistettä (Kuva 15a) ja suljettujen kenttäviivojen aluetta. Shokin nopeutena on käytetty $V_{shokki} =$

800 km/s ja puristussuhteena $X = 4$. Tämä geometria on lähinnä diffusiivisen shokkikiihdytyksen oppikirjamallia siinä mielessä, ettei magneettikentän ja shokin tason välinen kulma muutu dramaattisesti simulaation aikana.

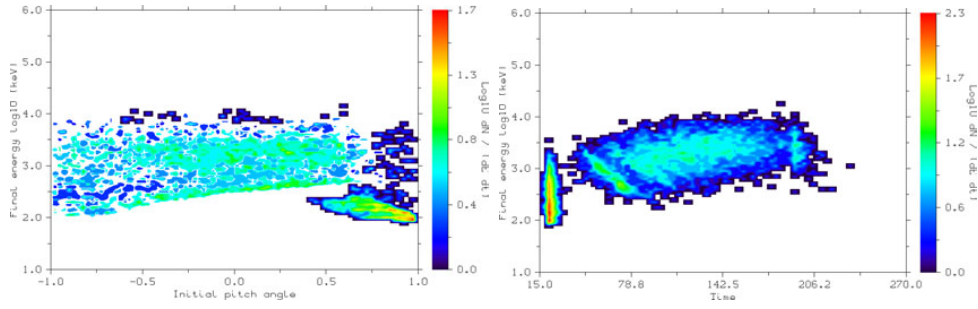


Kuva 15: (a) Vasemmalla bipole_down-ajojen geometria. Shokattu alue on piirretty punaisella laatikolla, injektio kenttäviiva ja -piste vihreällä. (b) Oikealla 10000 hiukkasen ajosta saatu differentiaalinen energiaspektri sironta-ajalla $t_{sironta} \approx 1300 t_{gyro}$.

Ensiksi on todettava, että hiukkasten energioihin vaikuttaa monta tekijää. Shokin lähellä energia kasvaa diffusiivisesti sironnassa ja gradienttivoiman aiheuttamasta johtokeskuksen kulkeutumisesta shokin sähkökentässä. Toiseen shokki kulkee koko ajan kohti voimistuvaa magneettikenttää (ainakin injektioviivan osalta). Shokin koordinaatistossa magneettikenttä voimistuu ajallisesti, mikä pyrkii kasvattamaan varauksen nousukulmaa. Sironta puolestaan voi pienentää nousukulmaa, jolloin energiaa tulee lisää adiabaattisen puristuksen muodossa.

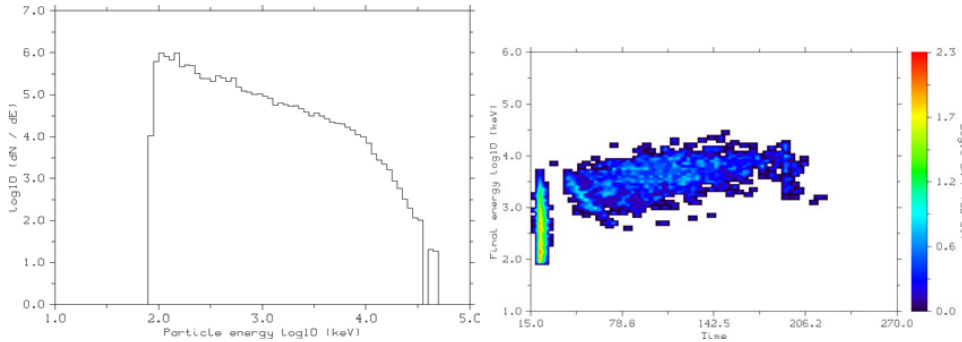
Lisäksi on vielä kentän kaareutumiseen perustuva efekti, joka todennäköisesti ei tässä geometriassa näyttele suurta osaa. Oletetaan, että injektioviiva kaa-reutuu shokin edetessä siten, että kaltevuuskulma kasvaa ajan myötä, jolloin myös kentän voimakkuus kasvaa. Tällöin injektioviivan nopeus (eli muunnosnopeus DHT -koordinaatistoon) pitkin shokin tasoa $V_{dht} = V_{shokki} \tan \psi$ kasvaa jatkuvasti shokin lähestyessä superluminaalista. Magneettikentän supistuminen pyrkii peilaamaan varausten liikettä kohti alavirtaa, shokki taas sen tönäisemään osan varauksista kohti ylävirtaa. Myös sironta vangitsee varauksia shokin läheisyyteen. Sopivasti shokin kanssa resonanssissa oleva varaus kiihtyy jokaisen shokin kohtaamisen yhteydessä $\sim V_{dht}$ luokkaa olevaan nopeuteen, joka lähestyy ääretöntä shokin muuttuessa täysin poikittaiseksi. Tämä mekanismi kykenee potentiaalisesti kiihdyttämään hiukkasia relativistisiin energioihin hyvin lyhyessä ajassa. Kutsutaan tätä jatkossa De Hoffmann-Teller-resonanssiksi (DHT-resonanssi).

Ensimmäisissä kuvasarjoissa on sirontojen välinen aika $t_{sironta} \approx 1300 t_{gyro}$ vastaten hyvin heikkoa sirontaa. Tarkastelemalla energiaspektriä (kuva 15b)



Kuva 16: (a) Vasemmalla bipole_down $t_{sironta} \approx 1300 t_{gyro}$ ajon hiukkasten lopullinen energia vs. alkutilan nousukulman kosini. (b) Oikealla energia vs. ajanhetki, jolloin varaus on poistettu simulaatiosta.

nähdään, että energian ja hiukkasten lukumäärän välinen relaatio on likimain lineaarinen kulmakertoimella $\sigma \approx 1$ välillä $10^2 - 10^{3.5}$ keV, jonka jälkeen energiaspektri muuttuu epälineaariseksi ~ 2.5 MeV tienoilla. Lineaarinen relaatio olisi todennäköisesti jatkunut korkeammille energioille leveämmällä sironta-alueella.



Kuva 17: (a) Vasemmalla energiaspektri bipole_down $t_{sironta} \approx 420 t_{gyro}$ ajosta. (b) Oikealla energia vs. aika. Spektrin lineaarinen osa jatkuu nyt noin 10 MeV energiaan asti spektri-indeksillä $\sigma \approx -1$.

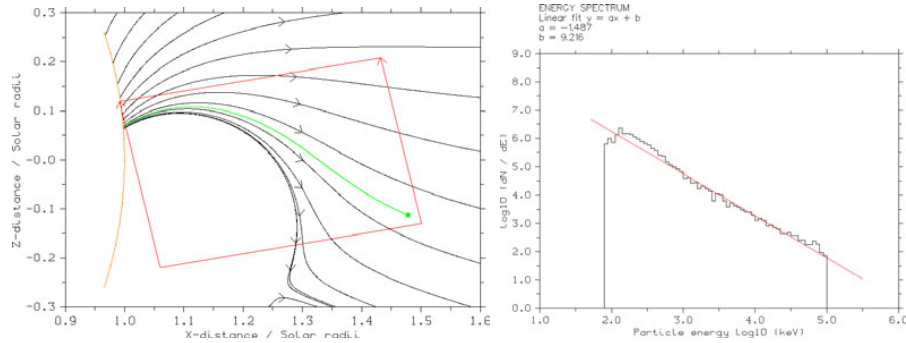
Energia vs. aika-kuvassa (kuva 16b) nähdään voimakas piikki ajan $t = 20.0$ s tienoilla, jolloin hiukkaset on injektoitu shokkiin. Tämä piikki vastaa tilannetta, jossa osa varauksista on sironnut shokin ympärillä noin 0–7 sekunnin ajan karaten lopulta alavirtaan. Diffusiivinen prosessi on kyennyt kasvattamaan energiaa noin 2.4 MeV asti, joka likimain vastaa myös energiaspektrin lineaarista aluetta. Loput hiukkaset ovat liikkuneet ylävirran sironta-alueen läpi ja käyneet ponnahtamassa peilipisteen kautta takaisin shokkiin. Nopeammat hiukkaset taittavat matkan shokki-peilipiste-shokki lyhyemmässä ajassa, mikä näkyy raitoina 45 – 100 s välillä poistettujen hiukkasten lukumäärässä. Käytetyllä hiukkasmäärällä kuvasta hahmottuu neljä ponnahtusta.

Energia vs. nousukulma-kuvasta (kuva 16a) näkyy, että injektio pisteessä lähes magneettikentän suuntaan ($\cos \alpha \approx 1$) liikkuneet hiukkaset ovat kyenneet tunkeutumaan hyvin sekä itse shokin että alavirran sironta-alueen läpi. Samoin kuvan matalaenergisessä osassa on vastaavaa muotoa kuin tavallisessa shokkikiihdytyksessä (luku 4). Energian noin kolminkertaistamiseen $\cos \alpha \sim 0.5$ tienoilla tarvitaan luokkaa $\psi = 88^\circ$ oleva kulma shokin normaalin ja ylävirran kentän välillä, joka on lähellä tämän geometrian tilannetta simulaation alkupuoliskolla (kuva 15a).

Pienentämällä sironta-aikaa ($t_{sironta} \approx 420 t_{gyro}$) tulee diffusiivinen kiihdytys merkittävämmäksi. Energiaspektrin lineaarinen osa jatkuu nyt noin 10 MeV energiaan asti spektri-indeksillä $\sigma \approx 1$. Energia vs. aika-kuvasta erottuu enää ensimmäinen ponnahdus peilipisteestä (kuvat 17a ja 17b).

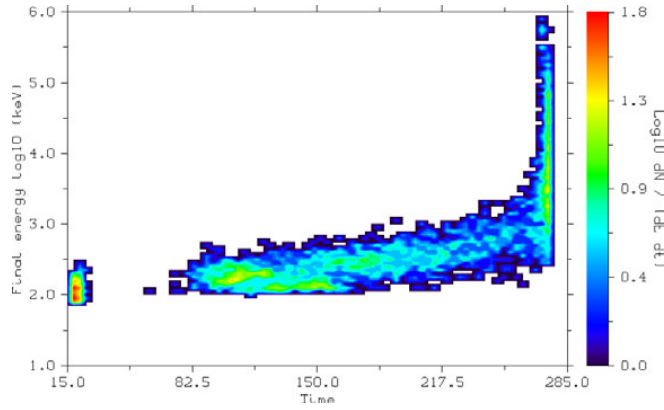
7.2 Bipole -ajot

Tässä geometriassa shokki on käännetty etenemään pois päin suljettujen kenttäviivojen alueelta. Merkittävin ero edelliseen geometriaan verrattuna on shokin kaltevuuskulman käyttäytymisessä ajon lopussa (kuva 18a). Injektioviiva on suurimman osan ajasta lähes samansuuntainen shokin normaalin kanssa taittuen lopussa nopeasti poikittaiseksi. Shokin nopeutena on jälleen käytetty 800 km/s ja puristussuhteena $X = 4$. Injektoidut hiukkaset olivat 100 keV protoneja.



Kuva 18: (a) Vasemmalla Bipole -ajojen geometria. Injektioviiva ja -piste väritetty vihreällä, shokattu alue punaisen laatikon sisällä. Shokki liikkuu pois suljettujen kenttäviivojen alueelta. (b) Oikealla $t_{sironta} \approx 1300 t_{gyro}$ sironta-ajalla tehdyn ajon energiaspektri. Spektri on katkaistu 100 MeV kohdalle. Pienimmän neliösumman menetelmällä spektri-indeksiksi saadaan $\sigma \approx -1.49$.

Ensiksi heikolla sironta-ajalla $t_{sironta} \approx 1300 t_{gyro}$ saatuja tuloksia. Energiaspektri (kuva 18b) on lineaarinen aina 100 MeV energioihin asti, johon statistiikka on katkaistu vastaten $\sim 0.46 c$ nopeutta (integroijat olivat epärelati-



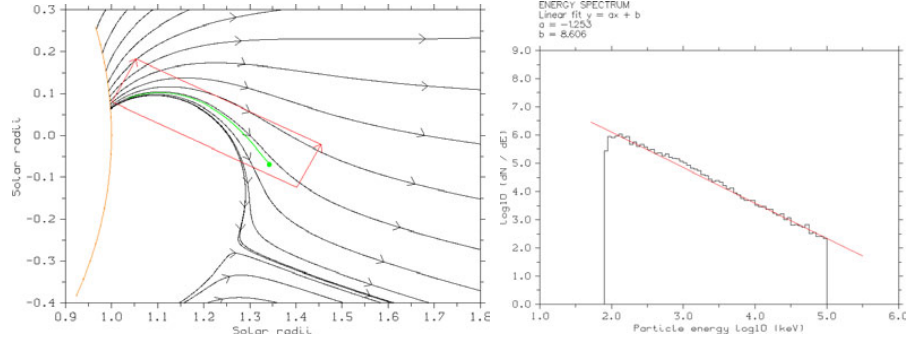
Kuva 19: Energia vs. aika -kuva bipole $t_{sironta} \approx 1300 t_{gyro}$ ajosta

vistisia). Spektri-indeksiksi saadaan suoran sovituksella $\sigma \approx -1.49$, mikä on teorian ennustetta jyrkempi. Sironta-alueen efektiivinen leveys on tässä edellistä geometriaa suurempi johtuen suuremmasta shokin kaltevuuskulmasta. Tässä geometriassa energiamuutokset aiheutuvat diffusiivisen shokkikiihdytyksen ja adiabaattisen puristuksen lisäksi myös DHT-resonanssista.

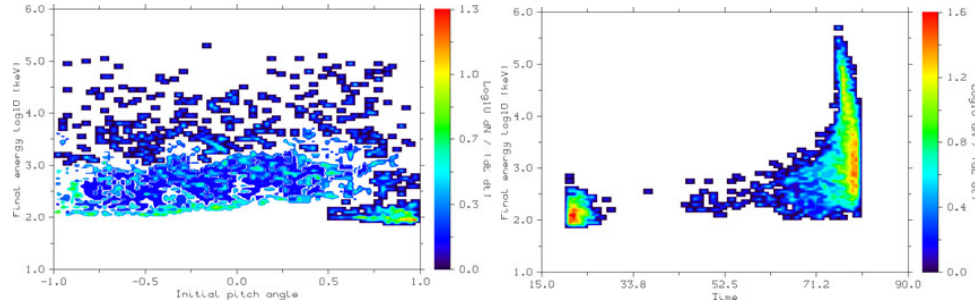
Energia vs. aika -kuvassa (kuva 19) nähdään 20 s kohdalla injektio pisteestä alavirtaan karanneita hiukkasia. Kaltevuuskulma injektiohetkellä on merkittävästi Bipole_down -geometriaa pienempi, jolloin shokin ylityksessä saadut energialisäykset ovat jääneet pienemmiksi. Varausten energia on kasvanut tasaisesti 280 s asti, jonka jälkeen kaikki hiukkaset ovat poistuneet lyhyen ajan sisällä shokin muututtua poikittaiseksi. Tässä kohdassa loppujen hiukkasten energiat ovat jopa satakertaistuneet parin sekunnin sisällä, mahdollisesti DHT-resonanssista johtuen. 80-150 sekunnin välisenä aikana on poistunut keskimääräistä enemmän hiukkasia, mutta kuvan perusteella on vaikea sanoa, onko tässä kyseessä ensimmäinen ponnahtus peilipisteen ja shokin välillä.

7.3 Bipole_arc -ajot

Tämä geometria voisi esittää auringonpilkkuparin aktiiviselta alueelta lähtevää shokkia (kuva 20a). Shokin nopeus on jälleen 800 km/s ja puristussuhde $X = 4$. Injektio pisteeseen (vihreällä) laitettiin 100 keV protoneja. Tässä geometriassa ylävirran kentän peilipiste sijaitsee aivan shokkilaatikon alareunassa siirtyen nopeasti alavirran puolelle. Injektioviiva leikkaa kahteen kertaan shokin tason, joten hiukkaset kohtaavat shokin monta kertaa. Shokin takapuolelle jäävä peilipiste voi ponnahtaa Aurinkoa kohti alavirtaan karkaamassa olevat hiukkaset vielä kerran. Hiukkaset poistetaan simulaatiosta, kun ne ovat yli ~ 1400 km etäisyydellä shokista alavirran puolella, joten tämä ponnahtus saattaa näkyä ajojen lopputuloksissa. Sähköinen kulkeutu-



Kuva 20: (a) Vasemmalla bipole_arc -ajojen geometria. Shokki liikkuu aktiiviselta alueelta poispäin kulkien kaarimaisen rakenteen läpi. (b) Oikealla $t_{sironta} \approx 1300 t_{gyro}$ sironta-ajalla tehdyn ajon energiaspektri.



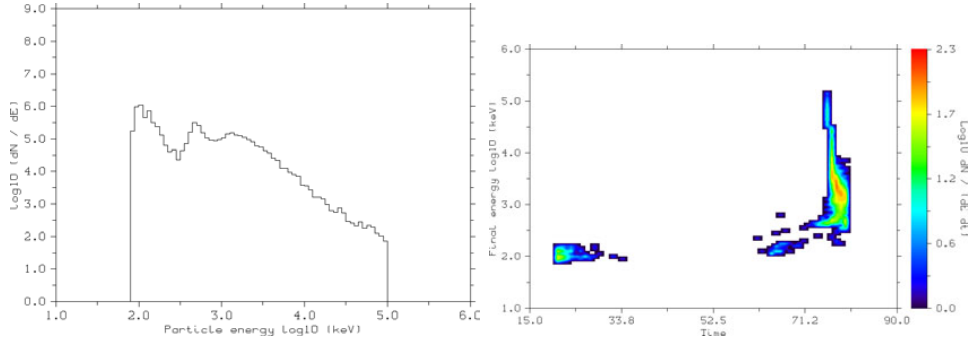
Kuva 21: (a) Vasemmalla bipole_arc energia vs. nousukulman kosini $t_{sironta} \approx 1300 t_{gyro}$ sironta-ajalla. (b) Saman ajon energia vs. aika.

misnopeus shokin takana siirtää varaukset tälle etäisyydelle noin seitsemässä sekunnissa olettaen täysin poikittaisen geometrian.

Shokin suuresta kaltevuuskulmasta johtuen jo $t_{sironta} \approx 1300 t_{gyro}$ sironta-aika riittää tekemään energiaspektrin erittäin hyvin lineaariseksi (kuva 20b). Spektri-indeksiksi saadaan suoran sovituksella $\sigma \approx -1.25$, mikä on hieman teorian ennustetta jyrkempi. Energiaspektri on jälleen katkaistu 100 MeV energian kohdalle. Tällaisella geometrialla näyttäisi olevan kyky tuottaa jopa 1 GeV energioita, asia pitäisi varmistaa relativistisella koodilla. Myös tässä geometriassa DHT-resonanssi voi kasvattaa varausten energiaa.

Energia vs. nousukulma -kuvassa (kuva 21a) näkyy jälleen injektio pisteestä nopeasti shokin läpi kulkeneita hiukkasia. Samoin matalilla energioilla erotuu shokkikihihdytyksen ennustamaa muotoa, eli nämä varaukset ovat kulkeneet shokin yli täsmälleen kerran juurikaan siroamatta. Energia vs. aika -kuvassa (kuva 21b) on injektio pisteestä suoraan shokin läpi poistuneita hiukkasia 20 sekunnin kohdalla. Pitkä väli seuraaviin hiukkasiin vastaa likimäärin aikaa, joka varauksilta kuluu kulkea injektioviivaa pitkin shokkilaatikon

alareunaan. Tämän jälkeen hiukkaset ovat saaneet tasaisesti energiaa ~ 75 sekuntiin asti, jonka jälkeen shokki muuttuu nopeasti poikittaiseksi. Noin 75-80 s välisenä aikana loput varaukset ovat ajautuneet alavirtaan, korkeae-nergisimmät hieman nopeammin. Tämä saattaa osittain johtua ponnahtusliikkeestä shokin takana.



Kuva 22: (a) Vasemmalla $t_{\text{sirona}} \approx 170000 t_{\text{gyro}}$ sirona-ajalla saatu energiaspektri. (b) Oikealla energia vs. aika samasta ajosta.

Esimerkkinä tilanteesta, jossa sironnalla ei ole juurikaan vaikutusta, on ajo tässä geometriassa $t_{\text{sirona}} \approx 170000 t_{\text{gyro}}$ sirona-ajalla. Energiaspektri (kuva 22a) ei ole enää lineaarinen, maksimienergia ei tosin ole juurikaan muuttunut. Energia vs. aika -kuvassa (kuva 22b) näkyy heti injektion läpi poistuneita hiukkasia 20 sekunnin kohdalla. Loput hiukkasista ovat todennäköisesti kulkeneet injektioviivaa pitkin lähelle Aurinkoa ja kohdanneet shokin uudelleen. Ylävirran kentän peilipiste, shokin peilin lisäksi, estää varauksia läpäisemästä shokkia täällä. Hiukkaset peilautuvat liikkeeseen pois Auringosta ja kulkevat shokin läpi vasta seuraavalla kohtaamisella, nopeammat hiukkaset ensin.

8 Johtopäätökset

Simulaation tulosten perusteella shokkikiihdytys koronassa kykenee tuottamaan yli 100 MeV:n protoneja muutamien minuuttien aikana. Satelliittihavaintojen perusteella tämän täytyy tapahtua kymmenien minuuttien aikaskaaloissa [14], joten saadut tulokset sopivat hyvin yhteen havaintojen kanssa. Injektioenergiana käytetty 100 keV on ehkä liian korkea, 10 keV vastaisi paremmin termisen plasman korkeaenergiaista osaa.

Koko kiihdytysprosessi epähomogeenisessa kentässä on monimutkainen tapahtuma. Sironna vangitsee hiukkasia shokkirintaman lähelle, mikä käytetyissä geometrioissa aiheuttaa energiamuutoksia adiabaattisen puristumisen muodossa. Samoin sironnasta johtuen nousukulma voi muuttua ylävirran puolella siten, että vuotokartiossa oleva hiukkanen peilautuukin shokista. Jos kulma magneettikentän ja shokin normaalin välillä on suuri, lisäys varauksen energiaan on potentiaalisesti varsin korkea. Magneettikentän kaartuessa voimakkaasti shokin edessä shokki saa aina kiinni peilaamansa hiukkaset. Sironnan satunnaisesta luonteesta johtuen osa hiukkasista peilautuu monta kertaa myös lähes poikittaisilla geometrioilla. Tuloksissa tämä DHT-resonanssi näkyy nopeana, korkeaenergisena hiukkassuihkuna alavirtaan (esimerkiksi kuva 19).

Diffusiivinen shokkikiihdytys tarvitsee toimiakseen sirontaa sekä ylä- että alavirran puolella. Tämä voi olla ongelma erityisesti ylävirran puolella. Varauksen siroaminen niiden itse tuottamista magnetosonisista aalloista ei välttämättä ole riittävää. Tulosten perusteella sironnan ei tarvitse olla kovin voimakasta. Jo $t_{sironna} \sim 1300 t_{gyro}$ aika peräkkäisten sirontojen välillä on riittävää potenssilakimuotoisen energiaspektrin ja korkeiden energioiden tuottamiseen.

Tulosten perusteella voidaan päätellä, että shokkien vuorovaikutukset koronan rakenteiden kanssa ovat tärkeitä. Magneettiset peilit (esim. bipolegeometria) ja kaarirakenteet (bipole_arc) estävät hiukkasia osumasta Aurion pintaan tai karkaamasta shokista ylävirran puolelle. Varaukset voivat kohdata shokin monta kertaa lyhyen ajan sisällä esimerkiksi lähellä peilipistettä, jolloin myös energia kasvaa nopeasti. Tästä syntyvät hiukkassuihkut voisivat periaatteessa olla havaittavissa.

Viitteet

- [1] Baumjohann, Treumann. "Basic space plasma physics", Imperial College Physics, 1996.
- [2] Bell, A.R. "The acceleration of cosmic rays in shock fronts - I", Mon. Not. R. ast. Soc. 182:147-156, 1978.
- [3] Birdsall, Charles K., A. Bruce Langdon. "Plasma physics via computer simulation". McGraw-Hill Book Company, 1985.
- [4] Bittencourt, J.A. "Fundamentals of plasma physics", Pergamon Press, 1986.
- [5] Decker, Robert B. "Computer modeling of test particle acceleration at oblique shocks", Space Science Reviews 48:195-262, 1988.
- [6] Drury, L O'C. "An introduction to the theory of diffusive shock acceleration of energetic particles in tenuous plasmas", Rep. Prog. Phys. 46:973-1027, 1983.
- [7] Goldston, R.J., P.H. Ruherford. "Introduction to plasma physics", IOP Publishing Ltd, 1995.
- [8] Harrison R.A. et al. "Coronal dimming and the coronal mass ejection onset", Astronomy & Astrophysics, 400:1071-1083, 2003.
- [9] James, F. "A review of pseudorandom number generators", Computer Physics Communications 60:329-344, 1990.
- [10] Jones, Frank C., Donald C. Ellison. "The plasma physics of shock acceleration", Space Science Reviews 58:259-346, 1991.
- [11] Kirk, J.G., D.B. Melrose, E.R. Priest. "Plasma astrophysics", Saas-Fee Advanced course 24, lecture notes 1994, Springer-Verlag, 1994.
- [12] Lang, Kenneth R. "The Sun from space", Springer-Verlag, 2000.
- [13] Reames, Donald V. "Particle acceleration at the sun and in the heliosphere", Space Science Reviews 90:413-491, 1999.
- [14] Vainio, Rami ja Josef I. Khan. "Solar energetic particle acceleration in refracting coronal shock waves", The Astrophysical Journal, 600:451-457, 2004 January 1.
- [15] Webb, G.M., W.I. Axford & T. Terasawa. "On the drift mechanism for energetic charged particles at shocks", The Astrophysical Journal 270:537-553, 1983 July 15.

A Shokkiaalto

Alkuperäisessä koodissa kenttä shokin takana laskettiin induktioyhtälöstä käyttäen finite-difference –menetelmää. Opinnäytteen loppumetreillä huomattiin, että kenttä voidaan laskea analyyttisesti. Koodiin tehtiin tarvittavat muutokset ja analyyttisellä mallilla saadut muutamat tulokset ovat luvussa 7. Tässä liitteessä on esimerkki siitä, miten kentän aikakehitys lasketaan hilasimulaatiolla, jos sellaiseen tulee tarvetta.

Shokkiaalto mallinnetaan äärellisen kokoisena laatikkona, joka liikkuu ylävirran plasmassa vakionopeudella \mathbf{V}_{shokki} . Varsinainen shokkirintama on laatikon etureuna, jossa magneettikenttään sovelletaan vinon shokin hyppyehtoja. Kenttä rintaman takana puolestaan saadaan ideaali-MHD:ssa induktioyhtälöstä

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V}_{plasma} \times \mathbf{B}) - \eta \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (\text{A.1})$$

missä \mathbf{V}_{plasma} on plasman virtausnopeus shokin lepokoordinaatistossa ja η diffuusiokerroin.

Finite-difference-menetelmää käyttäen jaetaan shokkilaatikko hilapisteisiin, joissa magneettikenttä lasketaan vain ajanhetkille $t = 0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t \dots$. Magneettikenttä mielivaltaisessa paikassa laatikon sisällä hetkellä t saadaan interpoloimalla ajan ja paikan suhteen arvoista lähimmissä hilapisteissä. Jatkuvaa avaruutta siis approksimoidaan äärellisellä määrällä pisteitä. Tästä johtuen tilannetta kuvaavat yhtälöt, tässä tapauksessa induktioyhtälö, on myös muunnettava diskretisoituun muotoon. Ennen varsinaisten rataintegrointien aloittamista magneettikenttä shokkilaatikon alueella lasketaan koko ajalle ja taulukoidaan. Interpolointi tehdään aina tarvittaessa kentän taulukoiduista arvoista.

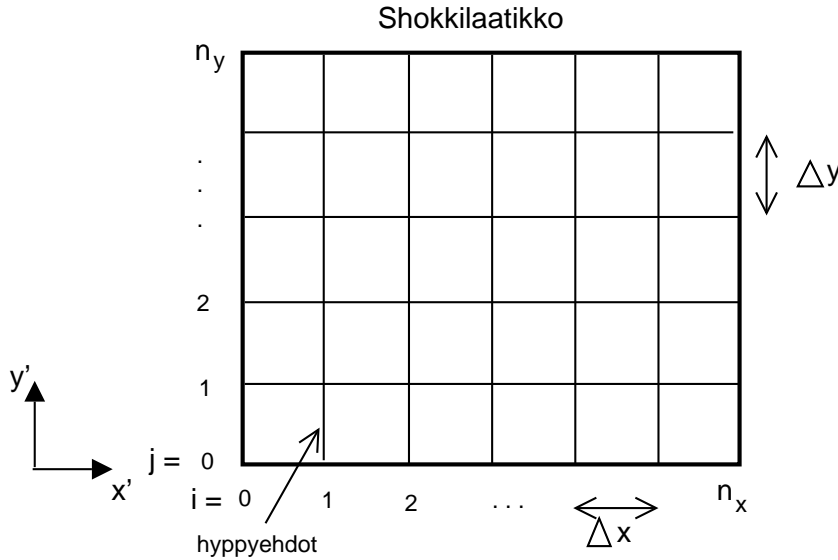
Kentän aikakehitystä laskettaessa tehdään vielä seuraavat tilannetta yksinkertaistavat oletukset:

- Diffuusio on niin hidasta, ettei sen vaikutusta tarvitse huomioida induktioyhtälössä.
- Plasman virtausnopeus ylävirrassa on nolla, jolloin sen nopeus shokin koordinaatistossa $\mathbf{V}'_{plasma} = -\mathbf{V}_{shokki}$.
- Vain kahdella ulottuvuudella ($x'y'$ -taso) on tässä tilanteessa merkitystä.

Nämä oletukset joudutaan tekemään lähinnä sen vuoksi, etteivät tarkasteltavan plasman parametrit ole tiedossa. Esimerkiksi plasman oikean nopeuskentän määrittämiseksi pitäisi erikseen simuloida shokkaamattoman plasman virtausta ja taulukoida nopeuskenttä kaikilla ajanhetkillä, tai sitten ratkaista *steady-state*-tilanteessa \mathbf{V}_{plasma} ideaali-MHD:n yhtälöistä olettaen magneettikenttä annetuksi. Näissä “oikeammissa” tilanteissakin joudutaan tekemään melkoinen määrä oletuksia plasman paineesta, tiheysprofiilista jne.

A.1 Kenttien laskeminen shokkilaatikon sisällä

Induktioyhtälön diskretisointi voidaan tehdä monella tapaa. *Laxin menetelmää* käyttäen, jonka tarkkuus on ensimmäistä kertalukua Δt :ssä, se tehdään seuraavasti: Jaetaan shokkilaatikko tasaväliseen hilaan siten, että $\Delta x = \Delta y$. x -suunnassa hilapisteitä on n_x kappaletta ja y -suunnassa n_y . Indeksoidaan hilapisteet i :llä ja j :llä siten, että $0 \leq i \leq n_x$ ja $0 \leq j \leq n_y$.



Kuva 23: Shokkiaaltoja ympäröivän alueen jakaminen hilapisteisiin ja shokkilaatikon koordinaatisto (pilkullinen). Shokkirintama sijaitsee hilapisteissä $x_{1,j}$, joissa magneettikenttään sovelletaan vinon shokin hyppyehtoja. Hilapisteiden väliset etäisyydet ovat samat kumpaankin suuntaan, $\Delta x = \Delta y$. Magneettikenttä pidetään homogeenisena laatikon etureunan ja shokkirintaman välisessä alueena, ja se saadaan laskemalla keskimääräinen ylävirran kenttä jokaiselle etureunan hilapisteelle.

Kirjoitetaan magneettikenttä Taylorin sarjaksi ajan suhteen pisteessä $x_{i,j}$:

$$\mathbf{B}_{i,j}^{t+\Delta t} = \frac{1}{4}(\mathbf{B}_{i+1,j}^t + \mathbf{B}_{i-1,j}^t + \mathbf{B}_{i,j+1}^t + \mathbf{B}_{i,j-1}^t) + \Delta t \frac{\partial \mathbf{B}_{i,j}^t}{\partial t} + \mathcal{O}(\Delta t^2), \quad (\text{A.2})$$

missä yläindeksi viittaa siihen ajanhetkeen, jonka arvoja käytetään. Sarjakehityksessä oleva osittaisderivaatta ajan suhteen saadaan induktioyhtälöstä (A.1). Spatiaaliset derivaatat voidaan diskretisoida vastaavaan tapaan Taylorin sarjoilla. Kaiken kaikkiaan näin saadun yhtälön avulla voidaan laskea magneettikentän uusi arvo ajanhetkellä $t' = t + \Delta t$ pisteessä $x_{i,j}$, kun sen arvot tunnetaan kaikkialla hetkellä $t' = t$. Huomioiden, että z -suunnassa ei tehtyjen oletuksien mukaan tapahdu

muutoksia, saadaan simuloitavaksi yhtälöryhmäksi komponenteittain

$$x : B_{i,j}^{t+\Delta t} = \frac{1}{4}(B_{i+1,j}^t + B_{i-1,j}^t + B_{i,j+1}^t + B_{i,j-1}^t) + \frac{V_{plasma}\Delta t}{2\Delta xy}(B_{i,j+1}^t - B_{i,j-1}^t), \quad (\text{A.3a})$$

$$y : B_{i,j}^{t+\Delta t} = \langle B \rangle - \frac{V_{plasma}\Delta t}{2\Delta xy}(B_{i+1,j}^t - B_{i-1,j}^t), \quad (\text{A.3b})$$

$$z : B_{i,j}^{t+\Delta t} = \langle B \rangle - \frac{V_{plasma}\Delta t}{2\Delta xy}(B_{i+1,j}^t - B_{i-1,j}^t), \quad (\text{A.3c})$$

missä $\langle B \rangle$ on lyhennysmerkintä B :n neljässä pisteessä lasketulle keskiarvolle.

Pienenä huomautuksena sarjakehitelmässä käytetään keskiarvoa magneettikentän arvoista tarkasteltavan hilapisteen ympärillä sen sijaan, että kirjoitettaisiin vain $\mathbf{B}_{i,j}^t$. Tämän tarkoituksena on kytkeä x - ja y -suunnissa tapahtuvat muutokset toisiinsa ja lisätä numeerista stabiilisuutta.

Hilasimulaatiossa kentän arvot täytyy tuntea aluksi, jotta simulaatio voidaan käynnistää, sekä simuloitavan alueen reunoilla kaikkina ajanhetkinä. Yksinkertaisin tapa määrätä alkutila on asettaa kenttä nolaksi kaikkialla. Laatikon etureunan hilapisteissä $x_{0,j}$ kenttä on ylävirran keskimääräinen ‘shokkaamaton’ kenttä. Kolmen muun reunan suhteen on pientä valinnanvapautta.

Käytettävän aika-askeleen suuruudelle pätee *Courant-Friedrichs-Levy*-ehto

$$\Delta t \leq \frac{\Delta xy}{\sqrt{2}V_{plasma}}. \quad (\text{A.4})$$

Tämä yksinkertaisesti tarkoittaa vain, että aika-askeleen on oltava niin pieni ettei informaatio kulje hilapisteiden välistä etäisyyttä pidempää matkaa ajassa Δt .

Sähkökentän arvot kaikkialla saadaan laskettua, kun plasman virtausnopeus ja magneettikenttä tunnetaan, eli

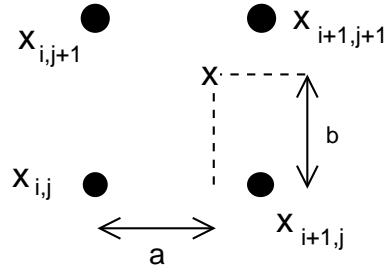
$$\mathbf{E} = -\mathbf{V}_{plasma} \times \mathbf{B}. \quad (\text{A.5})$$

Shokkilaatikon sisällä kenttä oletetaan homogeenisiksi niillä osin, kuin johtokeskusintegroijaa käytetään, joten ∇B kenttää ei tarvitse laskea. Mikäli tarvetta tulee, sen arvot saadaan laskemalla numeerisesti kentän voimakkuuden gradientit halutussa pisteessä (erittäin hidasta).

A.2 Magneettikentän interpolointi hilapisteiden välissä

Magneettikentän arvot shokkilaatikon sisällä tunnetaan vain ajanhetkien Δt välein hilapisteissä $x_{i,j}$. Kentän arvo muualla kuin hilapisteessä saadaan interpoloimalla bilineaarisesti se haluttua pistettä ympäröivistä lähimmistä hilapisteistä. Esimerkiksi magneettikentän x -komponentti saadaan laskulla

$$B_x = (1-a)(1-b)B_{i,j} + a(1-b)B_{i+1,j} + (1-a)bB_{i,j+1} + abB_{i+1,j+1}. \quad (\text{A.6})$$



Kuva 24: Bilineaarinen interpolointi lähimmistä hilapisteistä sekä kertoimien a ja b graafinen tulkinta.

Kertoimet a ja b ovat suhteelliset etäisyydet

$$a = \frac{r'_x - i\Delta x}{\Delta x}, \quad (\text{A.7})$$

$$b = \frac{r'_y - j\Delta y}{\Delta y}, \quad (\text{A.8})$$

missä r'_x ja r'_y ovat halutun paikan koordinaatit ja i ja j ovat kyseisestä paikasta katsottuna vasemmalla alhaalla olevan hilapisteiden indeksit. Samalla tavalla saadaan kentän kaksi muuta komponenttia. Interpolointi voidaan toki tehdä monella tapaa, mutta tällä menetelmän etuja ovat muunmuassa kohtalainen tarkkuus ja yksinkertaisuus.

Edellä kuvatulla tavalla saadaan laskettua kentän komponentit diskreeteille ajanhetkille $t = n\Delta t$, $n = 0, 1, 2, \dots, n_{max}$, joissa niiden arvot on taulukoitu. Muille ajanhetkille arvot saadaan lineaarisella interpolaatiolla

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}', t) = (1 - c)\mathbf{B}(\mathbf{r}', t = n\Delta t) + c\mathbf{B}(\mathbf{r}', t = (n + 1)\Delta t), \quad (\text{A.9})$$

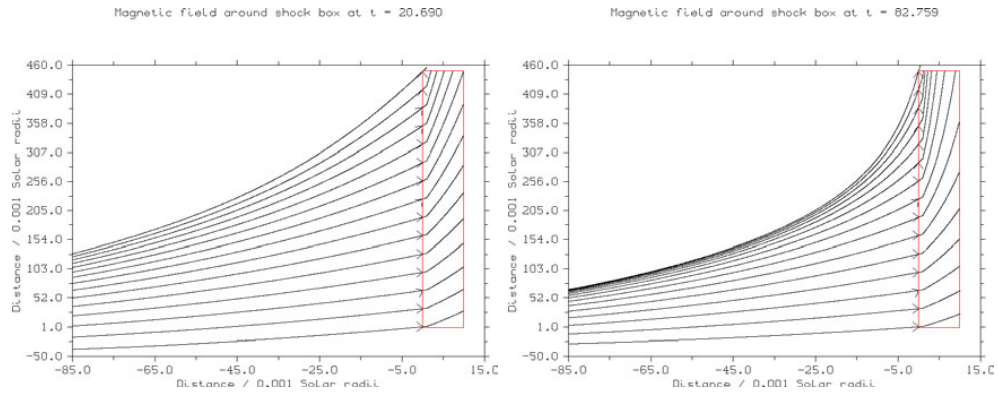
$$c = \frac{t - n\Delta t}{\Delta t}, \quad (\text{A.10})$$

ja n määräytyy siten, että $n\Delta t$ on aikaa t edeltävä aikahilan piste.

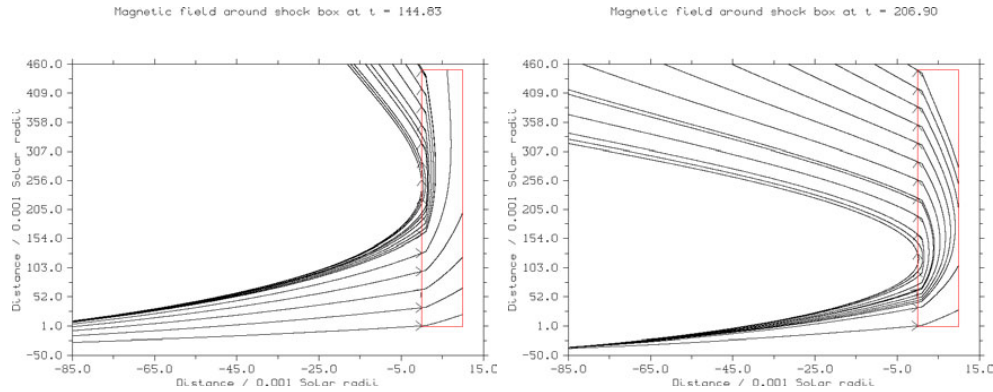
B Kuvia magneettikentästä shokin takana

Liitteessä on kuvia magneettikentästä shokin lähellä ylä- ja alavirran puolella. Kuvia on neljä kappaletta jokaisesta simulaatiossa käytetystä geometriasta. Kuvat on ajallisesti pyritty jakamaan siten, että sarjan ensimmäinen kuva on injektiohetkestä ja viimeinen likimain ajanhetkestä, jolloin viimeiset hiukkaset ovat poistuneet simulaatiosta.

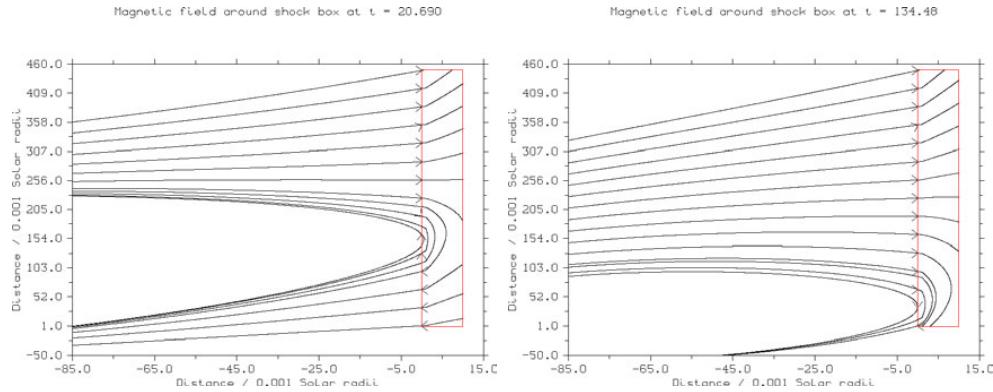
Ylävirran kentässä liikkuva, shokkia ympäröivä laatikko on piirretty kuviin punaisella. Magneettikenttää on kaikissa kuvissa alettu piirtää samoista pisteistä laatikon etureunassa eteen- ja taaksepäin. Pisteet sijaitsevat tasaisin välimatkoin y-suunnassa. Piirtotavasta johtuen lähelle toisiaan piirtyvät kenttäviivat eivät välttämättä kuvasta oikein kentän voimakkuuden muutoksia. Ajanhetket, jolloin kuvat on piirretty, sijaitsevat kuvien yläreunoissa.



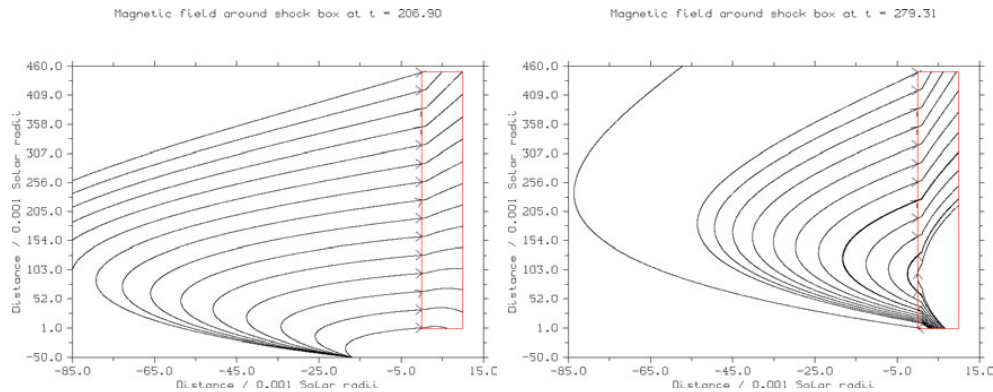
Kuva 25: Kuvia magneettikentästä shokin takana bipole_down -ajossa. Protonit injektioitiin aivan shokin eteen ylävirran puolelle hetkellä $t = 20.0$ s.



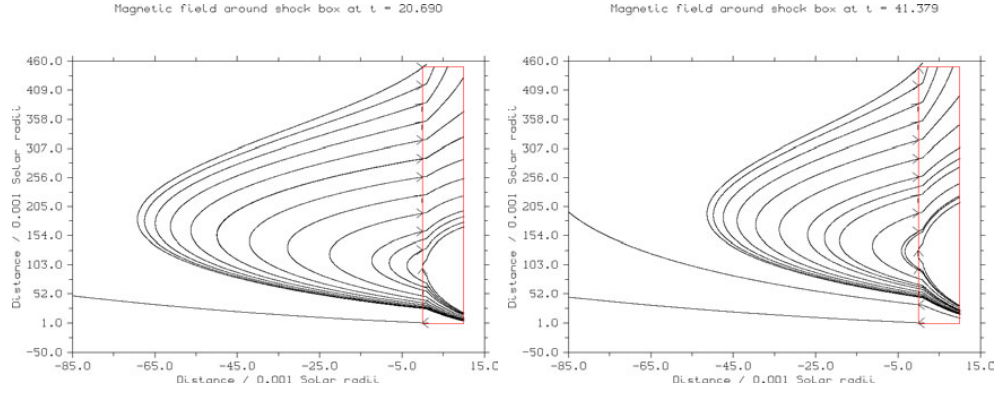
Kuva 26: Kuvia magneettikentästä shokin takana bipole_down -ajossa. Oikean puoleinen kuva likimain vastaa ajanhetkeä, jolloin viimeiset hiukkaset poistuivat simulaatiosta.



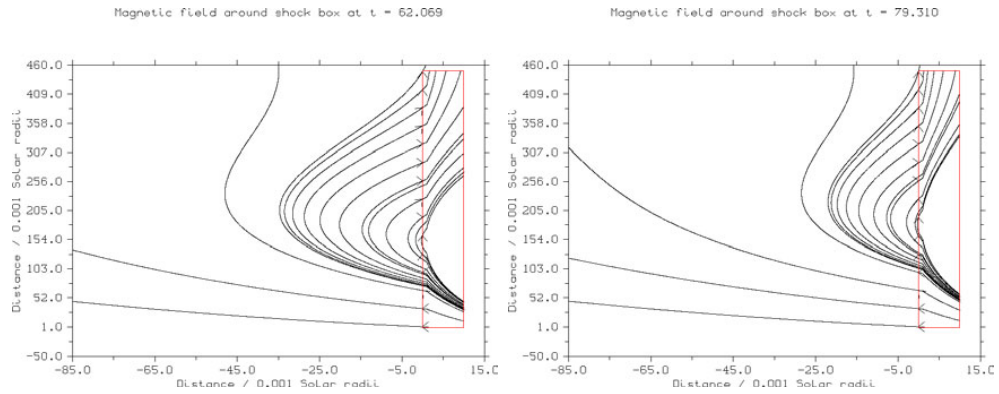
Kuva 27: Kuvia magneettikentästä shokin takana bipole -ajossa. Protonit injektioitiin shokin eteen hetkellä $t = 20.0$ s.



Kuva 28: Kuvia kentästä shokin takana bipole -ajossa. Oikeanpuoleinen kuva vastaa likimain ajanhetkeä, jolloin viimeiset hiukkaset poistuvat simulaatiosta.



Kuva 29: Kuvia kentästä shokin takana bipole_arc -ajossa. Protonit injektioitiin shokin eteen hetkellä $t = 20.0$ s.



Kuva 30: Kuvia kentästä shokin takana bipole_arc -ajossa. Oikeanpuoleinen kuva vastaa likimain ajanhetkeä, jolloin viimeiset hiukkaset poistuvat simulaatiosta.